Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 524-1/-8:524.88 На правах рукописи

УМБЕТОВА ЖАНБАЛА СУНДЕТОВНА

Анизотропные модели компактных звезд в модифицированных теориях гравитации

6D060400 – Физика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
профессор
К.Р. Мырзакулов

Зарубежный научный руководитель
доктор PhD,
профессор
Д. Синглетон
(Фресно, США)

Республика Казахстан
Астана, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ..... 4
ВВЕДЕНИЕ..... 5
1 КОМПАКТНЫЕ ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ..... 11
1.1 Общие релятивистские уравнения для распределения заряженной материи..... 12
1.2 Аналитическое решение для заряженной сферической модели 15
1.3 Граничные условия в общей теории относительности..... 17
1.4 Физический анализ компактных двойных звезд..... 18
1.4.1 Гидростатическое равновесие компактных двойных звезд..... 20
1.4.2 Энергетические условия компактных двойных звезд..... 23
1.4.3 Анализ устойчивости заряженных моделей..... 23
1.4.4 Причинность модели компактных двойных звезд..... 26
1.5 Влияние параметра электрического заряда E_0 на давление, плотность и показатель адиабаты 27
1.6 Предел компактности Андреассона и Бомера-Харко..... 29
1.7 Эффект медленного вращения, момент инерции, кривая $M-R$ и уравнение состояния компактных звезд..... 30
Выводы по первому разделу..... 34
2 АНИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ ЗВЕЗД В ТЕОРИИ *F(R)* ГРАВИТАЦИИ..... 37
2.1 Метрический формализм и основные уравнения в $F(R)$ гравитации..... 39
2.2 Граничные условия в модифицированной $F(R)$ гравитации..... 42
2.3 Метрические потенциалы и их закономерность..... 44
2.4 Физическая приемлемость моделей в $F(R)$ гравитации 45
2.4.1 Решение для модели: $F(R)=R+\alpha\left(e^{-\beta R}-1\right)$..... 47
2.4.2 Решение для модели: $F(R)=R-(1-\delta)\gamma^2\left(R/\gamma^2\right)^{\delta}$ 48
2.4.3 Оценка параметров модели и сравнение с соответствующими астрофизическими данными..... 50
2.5 Физические характеристики компактных звезд в *F(R)* гравитации 52
2.5.1 Плотность, давление и анизотропия в рассматриваемых моделях 52
2.5.2 Энергетические условия анизотропных компактных звезд..... 56
2.5.3 Гидростатическое равновесие анизотропных компактных звезд..... 58
2.5.4 Метод Эрреры..... 61
2.5.5 Параметры уравнения состояния..... 62
2.5.6 Функция массы и фактор компактности..... 64
2.5.7 Анализ красного смещения..... 64
2.5.8 Показатель адиабаты гравитационных моделей..... 66
Выводы по второму разделу..... 67
3 АНИЗОТРОПНЫЕ И ЗАРЯЖЕННЫЕ МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ ЗВЕЗД В $F(\widetilde{T})$ ГРАВИТАЦИИ..... 69

3.1 Краткий обзор в $F(\tilde{T})$ гравитации..... 71
3.2 Точное решение в $F(\tilde{T})$ гравитации..... 76
3.3 Граничные условия в $F(\tilde{T})$ гравитации..... 78
3.4 Физическая характеристика решения..... 79
3.4.1 Давление, плотность и анизотропия компактных звезд 79
3.4.2 Гидростатическое равновесие компактных звезд..... 81
3.4.3 Условие причинности модели..... 82
3.4.4 Показатель адиабаты заряженных объектов..... 84
3.4.5 Анализ устойчивости заряженных структур..... 85
3.5 Соотношение масса-радиус компактных звезд..... 86
3.6 Момент инерции для медленно вращающегося объекта..... 88
Выводы по третьему разделу..... 90
ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 93
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ..... 95

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ОТО	– общая теория относительности
МТГ	– модифицированная теория гравитации
СКМ	– странная кварковая материя
УС	– уравнение состояния
NEC	– условие нулевой энергии
WEC	– слабое энергетическое условие
SEC	– сильное энергетическое условие
DEC	– доминирующее энергетическое условие
уравнение ТОВ	– уравнение Толмана – Оппенгеймера – Волкоффа
NICER	– зонд внутреннего строения нейтронных звёзд
SKA	– радиоинтерферометр нового поколения
eXTP	– космическая обсерватория для исследования экстремальных состояний материи
XMM-Newton	– космический рентгеновский телескоп Европейского Космического Агенства
$M_\odot$	– Масса Солнца $M_\odot = 1.9885 \cdot 10^{30}$ кг
условия ХЗН	– условия Харрисона – Зельдовича – Новикова
ГВ	– гравитационные волны
КЗ	– компактные звезды
КО	– компактные объекты
НЗ	– нейтронные звезды
ЧД	– черная дыра
GBT	– радиотелескоп Грин-Бэнка
NANOGrav	– Североамериканская обсерватория наногерцевых гравитационных волн
NuSTAR	– ядерный спектроскопический телескопический массив

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию анизотропных компактных звезд (КЗ) во Вселенной в модифицированных теориях гравитации (МТГ). КЗ представляют собой важнейшие астрофизические объекты для изучения экстремальных физических процессов во Вселенной. К таким объектам относятся нейтронные звезды (НЗ), белые карлики, черные дыры (ЧД) возникающие в результате гравитационного коллапса массивных звезд, характеризующиеся сверхвысокими плотностями и сильными гравитационными полями. Теоретическое моделирование таких объектов требует точного описания как гравитационного взаимодействия, так и внутреннего состава вещества при экстремальных условиях.

Для описания КЗ используется общая теория относительности (ОТО), и однако последние наблюдения, включая гравитационно-волновые события GW170817 и GW190814, выявили существование объектов с массами, превышающими предельные значения, допускаемые в рамках ОТО. Это стимулировало развитие альтернативных моделей, основанных на МТГ, таких как $F(R)$, $F(\tilde{T})$, $F(Q)$, $F(Q,T)$ и других.

Исследованы физически реалистичные и стабильные заряженные КЗ в рамках $F(Q)$ гравитации. Используется анзац Бухдаля для динамики модели заряженной, изотропной жидкости. Принимается во внимание КЗ Her X-1 для графического анализа [1]. В рамках $F(Q,T)$ гравитации получены решения модифицированных полевых уравнений для заряженных изотропных звезд. В результате можно отметить влияние параметра заряда на повышение компактности и стабильности звезд и согласовывается с наблюдательными данными [2]. Также на фоне $F(Q,T)$ гравитации была исследована модель кротовой норы, которая является гипотетическим астрофизическим объектом. В работе анализируются различные профили плотности темной материи влияющий на геометрию и проходимость кротовых нор [3].

Дополнительную сложность и реалистичность моделям придает учет анизотропии давления, то есть различия между радиальным и тангенциальным компонентами давления. Анизотропия, проявляющаяся при плотностях, сравнимых или превышающих ядерную, играет важную роль в определении устойчивости компактного объекта, его предельной массы и структуры уравнения состояния вещества. В рамках МТГ анизотропные модели позволяют получить более точные и физически обоснованные решения уравнения поля, описывающих внутреннюю структуру КЗ.

Актуальность темы диссертации

Развитие области астрофизики и космологии привело к новому пониманию космоса и его загадочных компонентов. Несмотря на значительные достижения последних лет, все еще остается множество сложных проблем, которые побуждают ученых изучать различные характеристики, такие как звезды и сопутствующие им физические явления. Самый большой источник

видимого света во Вселенной возникает в результате ядерного синтеза, происходящего в звездах. Взрывы сверхновых звезд приводят к образованию КЗ. Звезда коллапсирует под тяжестью своей массы, когда внешнее давление внутри звезды больше не может сопротивляться силе гравитации. КЗ, такие как НЗ, белые карлики и ЧД, создаются в результате окончательной гибели звезд. КЗ имеют небольшой радиус, большую массу и структуру, на которую не влияют высокие температуры по сравнению с обычными звездами. За последние несколько десятилетий гравитационные теории проявили значительный интерес к изучению КЗ. Звездная эволюция, которая изучается через изотропные, а также анизотропные давления внутри звезд со стабильной конфигурацией НЗ, описывает природу, структуру, стабильность и жизненный цикл звезды.

Интерес к данной теме заключается в таких неразрешенных вопросах, как сущность темной материи и темной энергии. МТГ выступают с альтернативными подходами к объяснению этих явлений, избегая необходимости введения нестандартных форм материи. Анализ КЗ, обладающих сильнейшими гравитационными полями, в рамках данных теорий становится уникальной возможностью экспериментальной проверки предсказаний в условиях, недоступных для лабораторных исследований. Кроме того, учет анизотропии давления внутри КЗ, когда радиальное и тангенциальное давление существенно различаются, влияет в их теоретическое моделирование. Традиционное предположение об изотропности давления является упрощением, не отражающим реальные физические процессы в этих объектах. Исследование анизотропии открывает перспективы для более глубокого понимания внутренней структуры и стабильности компактных звезд.

Современные астрономические достижения, особенно в области детектирования гравитационных волн (ГВ), предоставляют обширные и точные данные о компактных звездах. Параллельно с гравитационно-волновыми наблюдениями, электромагнитные наблюдения, проводимые с помощью таких миссий, как зонд внутреннего строения НЗ (NICER), радиоинтерферометр нового поколения (SKA) и космическая обсерватория для исследования экстремальных состояний материи (eXTP), позволяют проводить высокоточные измерения массы, радиуса и момента инерции НЗ. Эти измерения предоставляют независимую информацию, которую можно использовать для проверки и сопоставления предсказаний анизотропных моделей с реальными астрономическими наблюдательными данными. Высокая точность современных измерений позволяет обнаружить даже небольшие отклонения от стандартных моделей, что открывает путь к обнаружению новых физических явлений и уточнению понимания гравитации в экстремальных условиях. Эти данные служат ценным инструментом для подтверждения и уточнения теоретических моделей, включая анизотропные модели внутренней структуры КЗ в контексте МТГ. Таким образом, исследования анизотропных свойств КЗ в МТГ могут привести к прорыву в понимании фундаментальных законов гравитации и структуры Вселенной.

Цель работы

Исследование влияния МТГ на структуру, свойства и устойчивость компактных звездных объектов, для расширения теоретических рамок описания астрофизических явлений в условиях сильной гравитации.

Объект и предмет исследования

Объект исследования – компактные астрофизические объекты и их поведение в условиях МТГ.

Предмет исследования

Уравнения гравитационного поля, структурные конфигурации компактных объектов, анализ устойчивости моделей с помощью критерия Харрисона-Зельдовича-Новикова, анализ равновесия с помощью уравнения Толмена-Оппенгеймера-Волкоффа, физическая приемлемость моделей и основные физические характеристики.

Методы исследования

Используются аналитические и численные методы для моделирования свойств исследуемых объектов, метрический формализм, анзац Дургапал-Фулории, анзац Бухдаля, а также для сопоставления теоретических предсказаний с доступными наблюдательными данными.

Задачи исследования:

1. Построение точного решения для анизотропных компактных звезд в общей теории относительности с учетом параметра заряда.

2. Построение моделей анизотропных компактных звезд в модифицированной $F(R)$ гравитации с анализом распределений давлений и плотности энергии.

3. Построение моделей анизотропных компактных звезд с учетом влияния кручения и электрического заряда в $F(\tilde{T})$ гравитации.

Научная новизна работы заключается в том, что впервые:

1. Получено аналитическое решение с гравитационным потенциалом $B_0^2 = \left(1+Sr^2\right)^2$, в котором влияние параметра заряда на основные характеристики исследовано при сохранении полной устойчивости модели, что позволяет описывать массивные компактные объекты.

2. Получено аналитическое решение уравнений гравитационного поля для анизотропных компактных звезд в теории $F(R)$ гравитации и проведена оценка параметров модели, в сравнении их с соответствующими наблюдательными данными.

3. Получено уравнение поля для анизотропного компактного объекта в $F(\tilde{T})$ гравитации с учетом анизотропии, параметра кручения и функцией заряда, которые позволяют более точно описывать внутреннюю структуру данных объектов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В модели анизотропной компактной звезды с учетом радиального электрического поля увеличение параметра заряда E_0 от 0 до $4\cdot10^{-6}$ приводит к снижению центрального давления с $1.136\cdot10^{35}$ Па до $6.350\cdot10^{34}$ Па и росту

допустимой радиальной координаты от 0 до 10 км при сохранении устойчивости системы.

2. Решения полученные, в моделях модифицированной теории гравитации экспоненциального $F(R)=R+\alpha\left(e^{-\beta R}-1\right)$ и обобщенного степенного $F(R)=R-(1-\delta)\gamma^2\left(R/\gamma^2\right)^{\delta}$ типа при диапазонах параметров α=11.112÷333.340, β=0.003÷0.090, γ=0.126÷0.327, δ=0.567÷0.697 удовлетворяют условиям причинности компактных объектов.

3. В теории модифицированной телепараллельной гравитации при увеличении параметра кручения ζ_1 в диапазоне 1.00-1.04 линейной функции $F(\tilde{T})=\zeta_1\tilde{T}+\zeta_2$ максимальная масса компактной звезды возрастает с 2.22 $M_{\odot}$ до 2.68 $M_{\odot}$ при радиусах 9.31-10.83 км, а момент инерции достигает $4\cdot10^{45}$ г·см^2, при этом система сохраняет устойчивое состояние, что согласуется с наблюдаемыми характеристиками нейтронных звезд.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты, полученные в диссертационной работе, вносят вклад в расширение теоретической базы для изучения КЗ, позволяя получить более реалистичное описание внутренней структуры и физических свойств с учетом заряда и анизотропии. Они могут быть использованы для моделирования эволюции КО и оценки их роли в формировании галактик. Кроме того, полученные результаты могут найти применение в смежных областях, таких как физика элементарных частиц и физика конденсированного состояния. Это помогает объяснить наблюдаемые данные и делать новые предсказания, подлежащие проверке наблюдениями.

Личный вклад автора

Весь объем диссертационной работы и основные результаты получены автором. Численные расчеты и графики найдены автором самостоятельно. Постановка задач и выбор метода проводились совместно с научными руководителями.

Достоверность результатов

По результатам диссертационной работы опубликовано 8 научных работ. Из них 6 статей в зарубежных журналах с высоким импакт-фактором. Опубликована 1 статья в журнале, входящем в список журналов, рекомендованных КОКСНВО МНВО РК, и 1 работа в материалах (трудах) международной конференции.

Статьи в рецензируемых научных журналах с ненулевым импакт – фактором, входящих в базы Scopus и Web of Science:

1 Maurya S. K., Errehymy A., Singh K. N., Jasim M. K., Myrzakulov K., & **Umbetova Z.** Modeling self-bound binary compact object with a slow rotation effect and effect of electric field gradient on the mass-radius limit and moment of inertia // Journal of High Energy Astrophysics. – 2024. – Vol. 44. – P. 45-59.

2 Kumar J., Maurya S. K., Chaudhary S., Errehymy A., Myrzakulov K., & **Umbetova Z.** Physically viable and stable charged perfect fluid solution within F(Q) gravity // Physics of the Dark Universe. – 2024. – Vol. 46. – P. 101593.

3 Maurya S. K., Errehymy A., Daoud M., Myrzakulov K., & **Umbetova Z.** Effect of torsion and electric charge parameters on the configuration of anisotropic compact stars in f(T) gravity // Physics of the Dark Universe. – 2024. - Vol. 46. - P. 101586.

4 Kumar R., Maurya S. K., Errehymy A., Myrzakulov K., **Umbetova Z.**, & Pathak V. N. Anisotropic model of stellar objects in modified f(R) gravity // Chinese Journal of Physics. – 2024. – Vol. 92. – P. 1-22.

5 Kumar J., Maurya S. K., Kiroriwal S., Errehymy A., Myrzakulov K., & **Umbetova Z.** Dynamics of relativistic wormholes in the presence of dark matter density profile within f(Q, T) gravity // Physics of the Dark Universe. – 2024. – Vol. 46. – P. 101636.

6 Maurya S. K., Errehymy A., **Umbetova Z.,** Myrzakulov K., Ibragimov I., Dauletov A., & Rayimbaev J. Implication of f(Q, T) gravity on the formation of the charge compact stars and constraining their mass-radius relations in lower mass gap region // Journal of High Energy Astrophysics. – 2025. –Vol.47. - P. 100391.

Тезисы и статьи к докладам на Международных и Республиканских конференциях

1 Абдижалилова У.У., **Умбетова Ж.С.** Сфералық-симметриялық анизотропты жұлдыз үшін телепараллель гравитациясындағы f(τ) ширату скалярын анықтау // XXI Международная научно-практическая конференция «Молодежь, наука и инновации» – Актобе: Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, 2025 - С. 406-409.

Статьи в изданиях, рекомендуемых КОКСНВО МНВО РК

1 **Умбетова Ж.С.,** Абдижалилова У.У. f(τ)-телепараллель гравитациясындағы анизотропты компактты жұлдыздардың эволюциясының динамикасы // Научный журнал «Доклады НАН РК» - 2025 – Т. 354, № 2. – С. 105–120.

Апробация работы

Научные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующей конференции:

– на XXI Международной научно-практической конференции «Молодежь, наука и инновации» Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, Актобе, 14 апреля 2025 г.

– на научных семинарах кафедры общей и теоретической физики ЕНУ им. Л.Н. Гумилева.

Связь темы диссертации с планами научной работы

Диссертационная работа выполнена в рамках проектов: по грантовому финансированию по научному и (или) научно-техническому проекту 2024-2026 гг. ИРН: AP23487178 "Исследование некоторых проблем современной космологии в модифицированных теориях гравитации с применением методов Байесовского машинного обучения"; по грантовому финансированию молодых ученых «Жас ғалым» 2025-2027 гг. ИРН: AP25794707 «Исследование анизотропных компактных звезд в рамках теории гравитации».

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения и списка использованных источников. Работа изложена на 103 страницах, иллюстрируется 41 рисунками, приведены 160 формул, 9 таблиц, список использованных источников содержит 150 наименований.

1 КОМПАКТНЫЕ ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Гравитационные волны (ГВ) открыли новую эру астрономических исследований и расширили понимание Вселенной с момента их прямого обнаружения коллаборациями LIGO и Virgo. Первое наблюдаемое событие ГВ, GW150914 не только подтвердило последнее оставшееся предсказание А.Эйнштейна в ОТО, но и предоставило ценную информацию о природе КО и процессах их слияния. В случае GW150914 преобладающее объяснение указывает на участие ЧД, поскольку тщательные расчеты масс объекта, конечного орбитального разделения и скоростей убедительно исключили возможность слияния НЗ. С одной стороны, открытие GW150914 не исключило возможности существования других экзотических и неоткрытых КО, таких как бозонные звезды. Учитывая, что не было обнаружено сопоставимого электромагнитного сигнала в связи с событием слияния, это весьма примечательно. С другой стороны, ряд многоканальных наблюдений по всему электромагнитному спектру и с использованием неэлектромагнитных посредников, таких как высокоэнергетические космические лучи, сделаны в связи с событием GW170817, что существенно отличается от предыдущих наблюдений. На основе имеющейся информации сделан вывод о том, что двойная система НЗ является наиболее вероятным сценарием слияния КО в GW150914. В результате слияния образовалась гипермассивная НЗ, которая коллапсировала в ЧД примерно за 300 миллисекунд. Это примечательное событие дало глубокое понимание внутренней структуры НЗ и УС, которая ими управляет. Слияние НЗ также было предложено в качестве возможного объяснения события GW190425. Но возможность того, что один или оба компонента двойной системы были ЧД, нельзя было исключить с уверенностью. Событие GW190425, также классифицировано как слияние НЗ. Тем не менее, один или оба компонента двойной системы не могли быть окончательно исключены как ЧД.

Событие GW190814 вызвало большой научный интерес в связи с необычной массой вторичного компонента - 2.50 до 2.67 $M_{\odot}$, что превышает известный предел массы НЗ но недостаточно велико для уверенной идентификации как ЧД. Это привело к ряду гипотез: быстро вращающаяся НЗ [4], кварковая звезда [5], или альтернативный тип КО [6]. Также активно обсуждаются модели на основе модифицированной гравитации, включая $F(R)$ и $F(Q)$ - теории [7-9], которые позволяют существование массивных стабильных конфигураций за пределами стандартного предела Толмана-Оппенгеймера-Волкоффа (ТОВ).

Кроме того, ранее показано, что включение электрического заряда и давления с анизотропией может значительно изменить структуру и устойчивость КО [10-15]. Градиенты электрического поля способны вносить вклад в баланс сил, а медленное вращение влияет на массу и момент инерции объекта.

В данном разделе будет построена новая аналитическая модель самосвязанных двойных КО в рамках ОТО с учетом эффектов электрического поля и медленного вращения. Модель применена к вторичному компоненту события GW190814, что позволяет уточнить предельные характеристики таких звезд – массу, радиус, момент инерции и форму уравнения состояния (УС) [16]. Анализ стабильности модели проводится по критериям Харрисона-Зельдовича-Новикова (ХЗН), показателю адиабаты и условиям причинности.

1.1 Общие релятивистские уравнения для распределения заряженной материи

Предполагается, что пространство-время КО является как статичным, так и сферически симметричным. Это означает, что внутренняя часть объекта может быть описана с использованием следующей формы метрики:

$$ds^2 = A_0^2(r)dt^2 - B_0^2(r)dr^2 - r^2\left(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right). \tag{1.1}$$

Здесь заданные координаты (t, r, θ, ϕ) находятся в системе координат типа Шварцшильда. Функции $A_0(r)$ и $B_0(r)$ произвольны и зависят только от радиальной координаты r , но их конкретные значения пока неизвестны. Тензор Эйнштейна, определяется как: $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$. Это определение применяется в системе естественных единиц, где G гравитационная постоянная и c скорость света которые оба равны 1.

Уравнения поля Эйнштейна-Максвелла часто выражаются следующим образом:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = k\left(T_{ij} + E_{ij}\right), \tag{1.2}$$

где $k = 8\pi$. Предполагается, что содержимое внутри объекта представляет собой анизотропную жидкость, в результате чего тензоры T_{ij} и E_{ij} представляют распределение жидкости и электрическое поле соответственно:

$$T_{ij} = \left(P_t + \rho\right)\upsilon_i\upsilon_j - P_t g_{ij} - \left(P_t - P_r\right)\theta_i\theta_j, \tag{1.3}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{4}\left(-F^{im}F_{jm} + \frac{1}{4} g_{ij} F^{mn}F_{mn}\right). \tag{1.4}$$

Здесь выражение для υ_i задается как $\upsilon_i = A_0\delta_{i4}$, где υ_i - 4-скорость. Индекс i соответстует единичному вектору в радиальном направлении, заданному как $\theta_i = B_0\delta_{i1}$. Величина ρ представляет собой плотность энергии. Величина P_r - давление в направлении i, также известное как радиальное давление. Величина

P_t обозначает давление, ортогональное i, которое также известно как поперечное или тангенциальное давление. Кроме того, здесь T_{11} равно $-P_r$. Значения T_{22} и T_{33} оба равны - P_t. Уравнение $T_{44}=\rho$ соответствует четвертой компоненте тензора энергии-импульса. При этом выполняется соотношение $E_{11}=-E_{22}=-E_{33}=E_{44}$. Однако тензор электромагнитного поля F_{ij} является антисимметричным, который удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$F_{ji,k}+F_{kj,i}+F_{ik,j}=0. \tag{1.5}$$

Единственным ненулевым компонентом 4-тока для неподвижного объекта является J^4. Элемент 4-тока является исключительно функцией r из-за сферической симметрии. Радиальная часть электрического поля описывается как $F^{41}=-F^{14}$, и только два неисчезающих элемента E^{ij} соответствуют компонентам F^{41} и F^{14}. Компонент электрического поля могут быть выражены:

$$A_0B_0r^2F^{41}=-4\pi\int_0^r\frac{\sigma r^2A_0B_0}{\sqrt{g_{44}}}dr=-4\pi\int_0^r\sigma r^2B_0dr, \tag{1.6}$$

где, $\sqrt{g_{44}}=A_0$. Кроме того, общий заряд, содержащийся внутри объекта радиусом r, может быть определен с помощью релятивистского закона Гаусса [17]:

$$q(r)=4\pi\int_0^r\sigma r^2B_0dr=r^2\sqrt{-F_{14}F^{14}}. \tag{1.7}$$

Решая уравнения (1.6) и (1.7), можно определить значение электрического заряда $q(r)$:

$$q(r)=-A_0B_0r^2F^{41}. \tag{1.8}$$

Уравнения поля Эйнштейна-Максвелла можно представить в виде системы дифференциальных уравнений для метрики (1.1):

$$-k(T_{11}+E_{11})=\frac{1}{r^2}\left[\frac{A_0+2A_0'r}{A_0B_0^2}-1\right]=kP_r-\frac{q^2}{r^4}, \tag{1.9}$$

$$-k(T_{22}+E_{22})=-k(T_{33}+E_{33})=\frac{-B_0'(A_0+A_0'r)+B_0(A_0'+A_0''r)}{A_0B_0^3r}=kP_t+\frac{q^2}{r^4}, \tag{1.10}$$

$$k(T_{44}+E_{44})=\frac{B_0^3-B_0+2B_0'}{B_0^3r^2}. \tag{1.11}$$

Используя метрическую функцию, можно определить функцию массы *m(r)* заряженной жидкой сферы как:

$$\frac{1}{B_0^2} = 1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \tag{1.12}$$

которая также равна

$$m(r) = \frac{\kappa}{2}\int \rho r^2 dr + \frac{1}{2}\int \frac{q^2}{r^2} dr + \frac{q^2}{2r}. \tag{1.13}$$

В то время как из уравнений (1.9) и (1.12) получается:

$$\frac{2A'}{A_0} = \frac{\kappa r P_r + \frac{2m}{r^2} - \frac{2q^2}{r^3}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}}. \tag{1.14}$$

Предполагая, что $P_r \neq P_t$, однако при $P_r = P_t$ соответствует изотропному распределению жидкости. Коэффициент анизотропии, обозначаемый здесь Δ, определяется в виде: $\Delta = P_t - P_r$. Выражение $\frac{2(P_t - P_r)}{r}$ представляет собой силу, которая возникает из-за анизотропных характеристик жидкости. Когда давление P_t больше давления P_r, сила направлена наружу. И наоборот, когда P_t меньше P_r, сила направлена внутрь. Однако, при $P_t > P_r$, сила позволяет создать более компактную структуру в случае анизотропной жидкости по сравнению с изотропным распределением жидкости.

Градиент давления может быть выражен через величины m, q, ρ и P_r с использованием системы уравнений (1.9) - (1.11), а также уравнений (1.12) и (1.14) как:

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{\kappa r P_r + \frac{2m}{r^2} - \frac{2q^2}{r^3}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}}(P_r + \rho) + \frac{q}{4\pi r^4}\frac{dq}{dr} + \frac{2\Delta}{r}. \tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) является заряженным обобщением гидростатического уравнения ТОВ для анизотропной звездной структуры [18,19]. Коэффициент анизотропии звездной конфигурации определяется путем вычисления разницы между двумя давлениями, как описано в уравнениях (1.9) и (1.10):

$$\Delta = \left(P_t - P_r\right) = \frac{1}{8\pi A_0 B_0^3 r^2}\left[r\left(B_0 A_0''r - B_0 A_0' - A_0' B_0' r\right) - A\left(B_0^3\left(2E^2 r^2 - 1\right) + B_0 + B_0' r\right)\right]. \quad (1.16)$$

1.2 Аналитическое решение для заряженной сферической модели

Основная цель данного раздела состоит в том, чтобы решить дифференциальное уравнение (1.16). Для этого необходимо выбрать три условия, чтобы получить решение в замкнутой форме. В этой связи [18, p. 364-372] предложена метрическая функция $B_0^2(r) = \left(1 + ar^2 + br^4\right)$, где F и S - постоянные величины, которая широко использовалась авторами для моделирования физически приемлемых самосвязанных КО в ОТО и МТГ [20, 21]. В частности, если принять постоянные $a=2S$ и $b=S^2$, то гравитационный потенциал $B_0^2(r)$ уменьшается до:

$$B_0^2 = \left(1 + Sr^2\right)^2, \quad (1.17)$$

где, S обозначает некую константу с размерностью l^{-2}. Этот потенциал (1.17) использовался для создания анизотропной звезды с хорошим поведением и эффектом медленного вращения в контексте ОТО. Проведен анализ соответствующий звезде 4U1608-52, масса и предполагаемый радиус которой составляют $M = 1.57^{+0.30}_{-0.25} M_\odot$ и $R = 9.8 \pm 1.8\, км$. Кроме того, также исследована масса и соответствующие радиусы для нескольких других самосвязанных объектов. Но в настоящем случае используется тот же гравитационный потенциал (1.17) для генерации самосвязанных звездных заряженных КО и влияния заряда на конфигурацию, стабильность и УС звезды.

Подставляя уравнение (1.16) в уравнение (1.17):

$$8\pi\Delta(r) = \frac{1}{A_0 r\left(r^2 S + 1\right)^3}\Big[r\left(-2A_0 E^2\left(r^2 S + 1\right)^3 + A_0 r^2 S^2\left(r^2 S + 3\right) + \\ + A_0'' r^2 S + A_0''\right) - A_0'\left(3r^2 S + 1\right)\Big]. \quad (1.18)$$

В стабильных звездных конфигурациях анизотропия считается исчезающей в ядре, то есть соответственно $P_r(0) = P_t(0)$, тогда как анизотропная сила, при $2\left(P_t - P_r\right)/r$, является либо отталкивающей, либо притягивающей. Кроме того, электрический заряд должен исчезать при $r = 0$ и быть положительным для каждого $r > 0$. Теперь будут рассмотрены второе предположение, введя параметр анизотропии, таким образом:

$$\Delta = \frac{S^2 r^2\left(Sr^2 + 3\right)}{8\pi\left(Sr^2 + 1\right)^3}. \quad (1.19)$$

Параметр анизотропии является физически приемлемым, поскольку он согласуется с предсказанным уменьшением анизотропии в центре $(r=0)$ и является положительной величиной по своей природе. Подставляя выражение (1.19) в выражение (1.18), получим:

$$2E^2\left(Sr^2+1\right)^2=\frac{A_0''}{A_0}-\frac{A_0'\left(3Sr^2+1\right)}{rA_0\left(Sr^2+1\right)}. \tag{1.20}$$

Тем не менее, нужно найти физически реалистичную форму электрического поля *E*, чтобы найти замкнутое решение уравнения (1.20). Можно заметить, что при $E=0$, уравнение (1.20) дает решение чистого анизотропного распределения материи [22]. Однако при поиске замкнутого решения для распределения материи предполагается конкретное выражение для электрического поля $E(r)$. В данной главе нами рассмотрен случай, когда $E^2=E_0r^2$, где константа E_0 называется параметром заряда [23]. Применив это выражение для заряда в уравнении (1.20) и проинтегрировав его, получим:

$$A_0(r)=L\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)+N\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right) \tag{1.21}$$

где L и N – являются некими постоянными интегрирования. Теперь явные выражения для давлений и плотности КО получены в виде:

$$8\pi\rho=\frac{r^4S^3+3r^2S^2-E_0r^2\left(r^2S+1\right)^3+6S}{\left(r^2S+1\right)^3}, \tag{1.22}$$

$$8\pi P_r=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{E_0}r^2}{\left(r^2S+1\right)A_0(r)}\left[L\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)+N\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\right]- \\ -\frac{S\left(r^2S+2\right)}{\left(r^2S+1\right)^2}+E_0r^2, \tag{1.23}$$

$$8\pi P_t=\frac{1}{\left(r^2S+1\right)^3A_0(r)}\left[\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\left[2\sqrt{2}\sqrt{E_0}L\left(r^2S+1\right)^2+\right.\right. \\ \left.+N\left(E_0r^8S^3+3E_0r^6S^2+\left(3E_0r^4-2\right)S+E_0r^2\right)\right]+\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\times \\ \left.\times\left\{L\left(E_0r^8S^3+3E_0r^6S^2+\left(3E_0r^4-2\right)S+E_0r^2\right)+2\sqrt{2}\sqrt{E_0}N\left(r^2S+1\right)^2\right\}\right] \tag{1.24}$$

1.3 Граничные условия в общей теории относительности

Граничные условия являются важнейшим компонентом анализа структуры КО. Для решения граничных условий связывается внутреннее решение с внешним решением Рейсснера-Нордстрема:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)} - r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right)+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2. \tag{1.25}$$

На границе, где давление обращается в ноль, то есть $r = R$. Здесь M и $Q = q(R)$ представляют собой массу Мизнера-Шарпа и полный заряд объекта на границе $r = R$. Для обеспечения плавной сшивки используется граничные условия Дармуа - Израэля [24, 25]. Эти условия приводят к следующему результату:

$$\left(1-\frac{2M}{R}+\frac{Q^2}{R^2}\right) = A_0^2(R), \tag{1.26}$$

$$\left(1-\frac{2M}{R}+\frac{Q^2}{R^2}\right) = \frac{1}{B_0^2(R)}, \tag{1.27}$$

$$P_r(R) = 0. \tag{1.28}$$

Используя вышеупомянутые условия, получено:

$$N(R) = \frac{\sqrt{1/\left(R^2S+1\right)^2}}{S_1(R)\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}R^2\left(R^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}R^2\left(R^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)}, \tag{1.29}$$

$$L(R) = \frac{S_1(R)\sqrt{1/\left(R^2S+1\right)^2}}{S_1(R)\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}R^2\left(R^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}R^2\left(R^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)}, \tag{1.30}$$

$$M(R) = \frac{E_0R^9S^2+2E_0R^7S+R^5\left(S^2+E_0\right)+2R^3S}{2\left(R^2S+1\right)^2}, \tag{1.31}$$

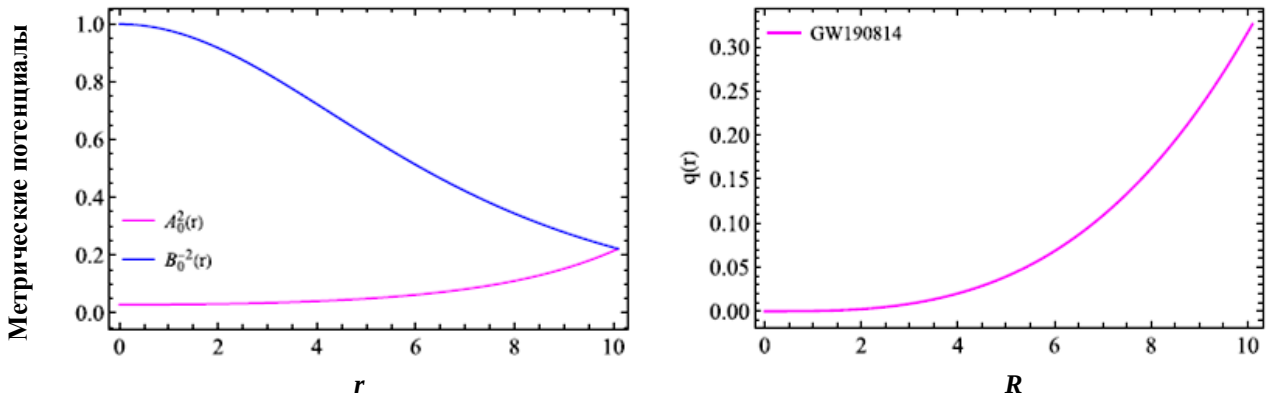
где

$$S_1(R)=\left[2\sqrt{2}\sqrt{E_0}\left(R^2S+1\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}R^2\left(R^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)+\left(2\left(E_0R^4-1\right)S+\right.\right.$$
$$\left.+E_0R^2+\left(E_0R^4-1\right)R^2S^2\right)\times\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}R^2\left(R^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\Bigg]\times$$
$$\times\left[2\sqrt{2}\sqrt{E_0}\left(R^2S+1\right)\times\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}R^2\left(R^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)+\left(2\left(E_0R^4-1\right)S\right.\right.$$
$$\left.\left.+E_0R^2+\left(E_0R^4-1\right)R^2S^2\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}R^2\left(R^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\right]^{-1}.$$

1.4 Физический анализ компактных двойных звезд

Основной целью данного подраздела является оценка физической осуществимости данной модели звезды путем изучения свойств важных термодинамических компонентов. Данное исследование будет сосредоточено на анализе характеристик таких компонентов, как ρ, P_r, P_t, Δ и их соответствия гидростатическому равновесию и энергетическим условиям.

В данном подразделе в первую очередь будет проанализировано поведение переменных A_0, B_0, $q(r)$, $\rho(r)$, P_r, P_t и $\Delta(r)$. Анализируя эти переменные, получен представление об их характеристиках и поведении в данной системе. На левой панели рисунка 1.1 можно наблюдать метрические потенциалы A_0^2 и B_0^2, которые и тщательно сопоставлены с внешними вакуумными решениями Шварцшильда на поверхности звезды с радиусом $R=10.1$ *км*. Примечательно, что данные потенциалы демонстрируют собой плавное поведение, лишенное какой-либо центральной сингулярности, и конечные значения во всей внутренней области $r<R$. Эти характеристики соответствуют аналитическим требованиям, приведенным в работе [26]. Хорошо известно, что наличие электрического заряда положительной величины в КЗ создает силу отталкивания, которая противодействует гравитационному коллапсу звезды [27]. Поддержание баланса и предотвращение гравитационного коллапса критически зависят от этой отталкивающей электрической силы, которая является следствием неотрицательного электрического заряда. На правой панели рисунка 1.1 можно наблюдать, что электрический заряд начинается с нуля в ядре и постепенно увеличивается по направлению к границе звезды GW190814.



а б

Рисунок 1.1 – Зависимости электрического заряда $q(r)$ и метрических потенциалов A_0^2 и B_0^2 от радиального расстояния r при постоянных значениях $S = 0{,}011\,км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\,км^{-4}$

Максимальный заряд достигается именно на границе звезд. Это характерное движение электрического заряда указывает на то, что электрическая сила, создаваемая зарядом, действует радиально наружу внутри звезды GW190814, и общая величина изменения на поверхности составляет $1.20123 \cdot 10^{20}\ Кл$. При анализе становится очевидным, что поверхности плотность энергии ρ, отображаемая, на верхней левой панели рисунка 1.2 сохраняет равномерность по всей внутренней части конструкции. Плотность энергии монотонно уменьшается по мере увеличения радиальной координаты, причем ее максимальное значение находится в центре звезды. Сосредоточимся на рисунке 1.2, а именно на верхней правой панели, где изображен зависимость P_r от r. В соответствии со схемой, приведенной ниже, отмечается, что P_r внутри звезды GW190814 остается постоянным и неуклонно падает по мере увеличения координаты r. Важно отметить, что центральная область звезды демонстрирует более высокое радиальное давление, в то время как оно постепенно уменьшается по направлению к поверхности звезды, что соответствует ожиданиям. На поверхности звезды радиальное давление действительно достигает нуля, как и ожидалось, и в соответствии с физическими требованиями.

Также на рисунке 1.2 на нижней левой панели можно наблюдать, что тангенциальное давление P_t монотонно уменьшается с увеличением радиальной координаты r. В центре конфигурации GW190814 (расположенной в области $r = 0$) и на поверхности звезды (то есть при $r = R$) тангенциальное давление, как и ожидалось, имеет ненулевые конечные значения. Интересно, что обнаружено, что максимумы центрального тангенциального давления первоначально смещаются вниз по мере приближения к поверхности звезды. Это означает, что наибольшее значение тангенциального давления находится ближе к центру звезды, а по мере продвижения к внешним областям максимальное тангенциальное давление уменьшается. Нижняя левая панель на рисунке 1.2

показывает тенденцию изменения параметра Δ. Когда $\Delta > 0$, это означает силу отталкивания, при которой радиальные давления преобладают над тангенциальными в звездной конфигурации GW190814. Эта сила отталкивания играет решающую роль в стабилизации КЗ GW190814 против направленной внутрь гравитационной силы. Примечательно, что параметр анизотропии демонстрирует хорошее поведение. Анизотропия исчезает в центре конфигурации, что указывает на баланс между радиальным и тангенциальным давлениями. По мере продвижения к границе величина параметра анизотропии растет. Такая возрастающая анизотропия приводит к большей стабильности поверхностных слоев звезды GW190814.

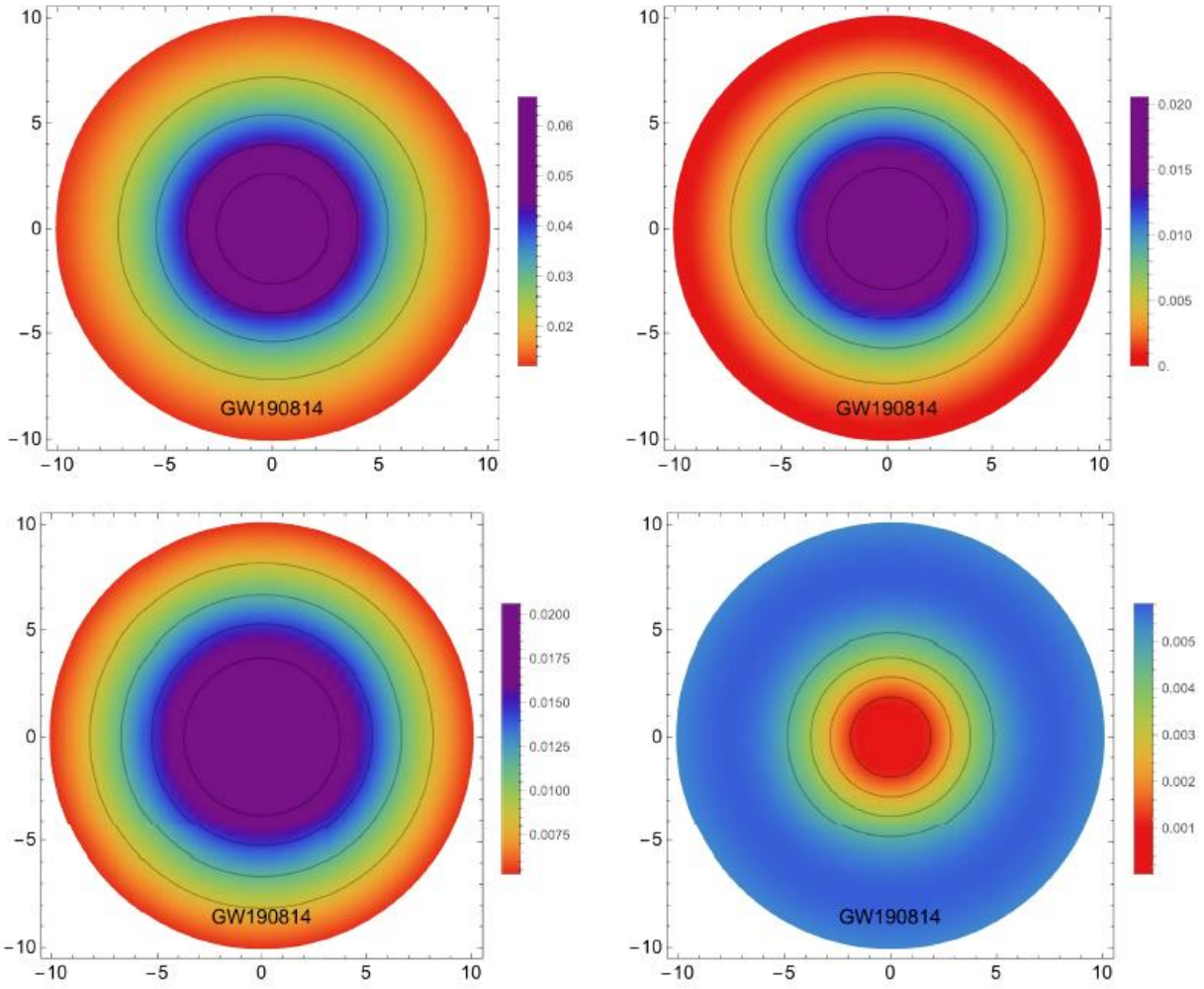


Рисунок 1.2 – Распределения плотности энергии $8\pi\rho$ - вверху слева, радиального давления $8\pi P_r$ - вверху справа, тангенциального давления $8\pi P_t$ - внизу слева и анизотропии $8\pi\Delta$ - внизу внутри звезды GW190814 радиуса $R = 10.1\,км$ со значением постоянных параметров $S = 0.011\,км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\ км^{-4}$

1.4.1 Гидростатическое равновесие компактных двойных звезд

В этом подразделе анализируется условие гидростатического равновесия заряженного объекта с помощью обобщенного уравнения ТОВ, которое широко известно как уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкоффа [18, p. 364–372; 19,

p. 374–380]. Формулировка ТОВ требует, чтобы модель демонстрировала устойчивое равновесие по трем конкретным силам, чтобы считаться осуществимой: гидростатическая, анизотропная и гравитационная сила. Математически сумма вышеуказанных сил должна последовательно равняться нулю по всему объекту. Формула ТОВ характеризует внутреннюю структуру компактного небесного объекта, имеющего сферическую симметрию. В рамках теории заряженной анизотропии она выражается как:

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{krP_r + \frac{2m}{r^2} - \frac{2q^2}{r^3}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}}\left(P_r + \rho\right) + \frac{q}{4\pi r^4}\frac{dq}{dr} + \frac{2\Delta}{r}. \tag{1.32}$$

Приведенное выше уравнение (1.32) может быть записано в виде различных составляющих сил следующим образом:

$$F_g = -\frac{krP_r + \frac{2m}{r^2} - \frac{2q^2}{r^3}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}}\left(P_r + \rho\right), \tag{1.33 а}$$

$$F_h = -\frac{dP_r}{dr}, \tag{1.33 б}$$

$$F_a = \frac{2\Delta}{r}, \tag{1.33 в}$$

$$F_e = \frac{q}{4\pi r^4}\frac{dq}{dr}. \tag{1.33 г}$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} F_g = &-\frac{2\sqrt{2}\sqrt{E_0}r}{8\pi}\left[L\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right) + N\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\right]\times \\ &\times\left[\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{E_0}L\left(r^2S+1\right)^2 + 2NS\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\times\right. \\ &\left.\times\left(2LS + \sqrt{2}\sqrt{E_0}N\left(r^2S+1\right)^2\right)\right] \Big/ \left[\left(r^2S+1\right)^2 \times \left(L\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right) + \right.\right. \\ &\left.\left. + N\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\right)^2\right], \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$F_h = -\frac{r}{8\pi}\Big[\left(L^2 - N^2\right)\left(3\left(5E_0 r^4 + 1\right)S^2 + 15E_0 r^2 S + \left(5E_0 r^6 + r^2\right)S^3 + 5E_0\right) -$$
$$- 2\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}\, r^2\left(r^2 S + 2\right)}{\sqrt{2}}\right)\times\left(\sqrt{2}\sqrt{E_0}\, L^2 S\left(r^2 S + 1\right) - LN\left(3\left(E_0 r^4 + 1\right)S^2 + 3E_0 r^2 S + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(E_0 r^6 + r^2\right)S^3 + E_0\right) + \sqrt{2}\sqrt{E_0}\, N^2 S\left(r^2 S + 1\right)\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}\, r^2\left(r^2 S + 2\right)}{\sqrt{2}}\right)\Big(L^2 \times$$
$$\times\left(3\left(E_0 r^4 + 1\right)S^2 + 3E_0 r^2 S + \left(E_0 r^6 + r^2\right)S^3 + E_0\right) - 4\sqrt{2}\sqrt{E_0}\, N^2 S\left(r^2 S + 1\right) + \qquad (1.35)$$
$$+ N^2\left(3\left(E_0 r^4 + 1\right)S^2 + 3E_0 r^2 S + \left(E_0 r^6 + r^2\right)S^3 + E_0\right)\Big)\Big]\Big/\Big[\left(r^2 S + 1\right)^3\Big(L\cosh\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{E_0}\, r^2\left(r^2 S + 2\right)}{\sqrt{2}}\right)\Big)^2\Big],$$

$$F_a = \frac{2rS^2\left(r^2 S + 3\right)}{8\pi\left(r^2 S + 1\right)^3}, \qquad (1.36\text{ а})$$

$$F_e = \frac{6E_0 r}{8\pi}. \qquad (1.36\text{ б})$$

Условие равновесия системы гласит, что сумма всех сил, действующих на систему, должна быть равна нулю, то есть $F_a + F_h + F_g + F_e = 0$, где F_a - анизотропная сила, F_h - гидростатическая сила, F_g - гравитационная сила, а F_e - электростатическая сила. Это означает, что для того, чтобы система находилась в равновесии, суммарная сила, действующая на объект, должна быть равна нулю, и это указывает на то, что все отдельные силы, действующие на объект, сбалансированы, и объект не вращается и не ускоряется. Рассмотрим поведение различных сил в зависимости от радиального расстояния r внутри звезды GW190814 для радиуса $R = 10.1\,км$ при значении постоянных параметров $S = 0.011\,км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\,км^{-4}$, как показано на рисунке 1.3. График показывает интересную закономерность в поведении различных сил, действующих внутри КЗ GW190814.

Во-первых, наблюдается, что электростатическая сила F_e совершенно незначительна, поскольку она остается равной нулю на всем протяжении радиального расстояния r. В отличие от этого, другие силы: F_a , F_h и F_g – демонстрируют более изменчивое распределение. Эти силы начинаются с нуля в центре звезды, затем постепенно увеличиваются по мере удаления от нее, достигая максимума на определенном радиальном расстоянии. После этой точки силы начинают уменьшаться по мере приближения к поверхности звезды. Примечательно, что положительные и отталкивающие анизотропные и гидростатические силы, как показано, в точности уравновешивают отрицательные и притягивающие гравитационные силы.

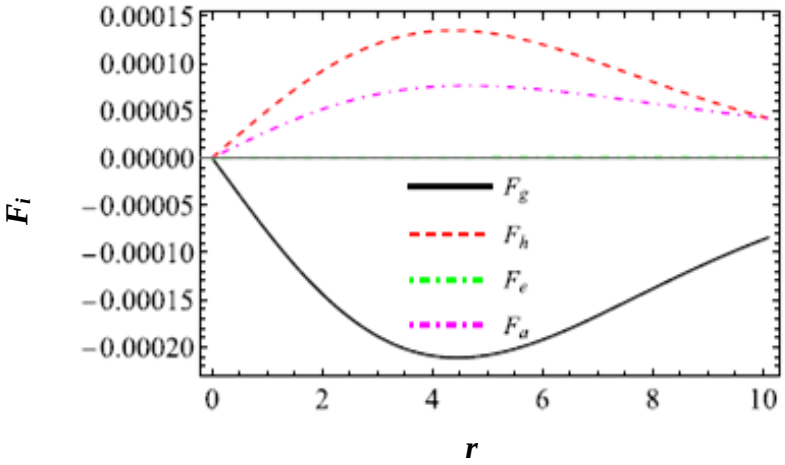


Рисунок 1.3 - Зависимость гидростатического равновесия от радиального расстояния r при постоянных параметрах $S = 0.011\,км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\,км^{-4}$

1.4.2 Энергетические условия компактных двойных звезд

В рамках теории гравитации Эйнштейна энергетические условия обычно определяются как определенные неравенства, которые обеспечивают связь между величинами ρ, P_r и P_t при соблюдении определенных ограничений. Чтобы обеспечить конструктивную осуществимость, объект должен соответствовать определенным энергетическим критериям внутри тела звезды. Анализ энергетических условий в основном фокусируется на нулевом энергетическом состоянии (NEC), слабом энергетическом состоянии (WEC), сильном энергетическом состоянии (SEC), доминирующем энергетическом состоянии (DEC) и отслеживание энергетического состояния:

$$\text{WEC}: \rho + E^2 \geq 0,\ P_r + \rho \geq 0,\ P_t + \rho + 2E^2 \geq 0,$$
$$\text{NEC}: P_r + \rho \geq 0,\ P_t + \rho + 2E^2 \geq 0,$$
$$\text{SEC}: \rho + P_r + 2P_t + 2E^2 \geq 0,$$
$$\text{DEC}: \rho - P_t \geq 0;\ \rho - P_r + 2E^2 \geq 0.$$

Для полученного заряженного анизотропного решения плотность энергии, давления и электрическое поле во внутренней части звезды должны быть положительными. Следовательно, энергетические условия WEC, NEC и SEC положительные (рисунок 1.1) и фокусируется только на DEC. На рисунке 1.4 показано, что данная заряженная анизотропная система удовлетворяет всем энергетическим критериям.

1.4.3 Анализ устойчивости заряженных моделей

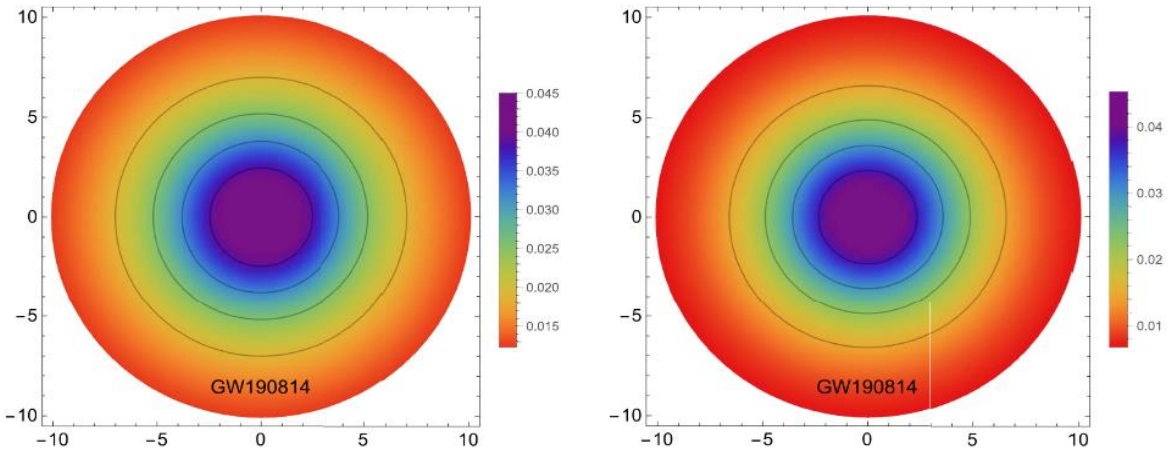
Используется результаты для соответствия критерию стабильности ХЗН [28, 29]. Достоверность критериев стабильности ХЗН определяется следующими неравенствами:

- $\frac{dM}{d\rho_0} < 0$ - нестабильная конфигурация;
- $\frac{dM}{d\rho_0} > 0$ - стабильная конфигурация.

Чтобы проверить это условие для решения с зарядом, определяется уравнение массы как алгебраическую функцию ρ_0 и ее производную, используя следующий метод:

$$M = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{9}{\left(4\pi\rho_0 R^2 + 3\right)^2} + E_0 R^4\right), \tag{1.37}$$

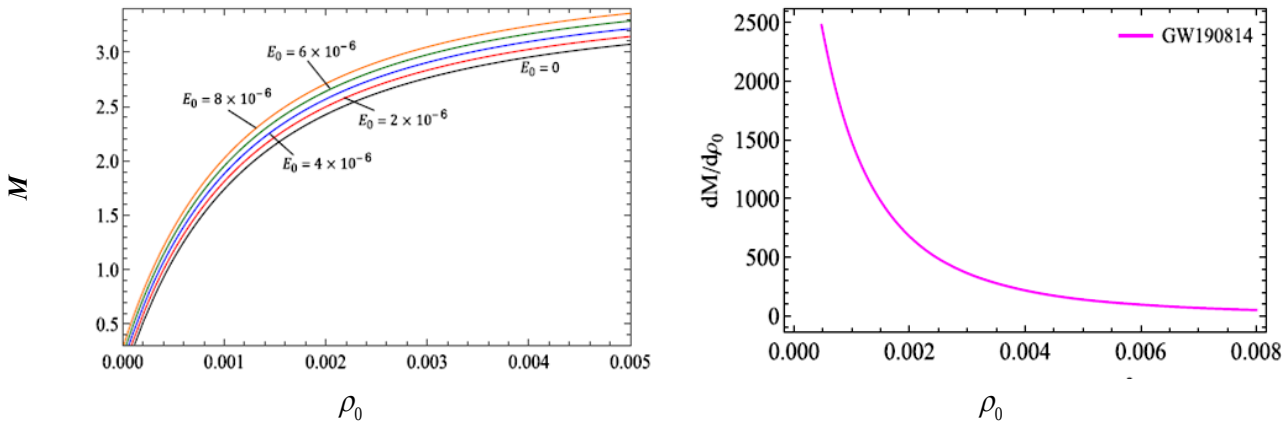
$$\frac{dM}{d\rho_0} = \frac{36\pi R^3}{\left(4\pi\rho_0 R^2 + 3\right)^3}. \tag{1.38}$$



а б

Рисунок 1.4 – Распределения энергетических состояний: $\rho - P_r + 2E^2$ (а) и $\rho - P_t$ (б) внутри звезды GW190814 радиуса $R = 10.1\,км$ со значением постоянных параметров $S = 0.011\,км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\,км^{-4}$

На основании рисунке 1.5 видно, что $dM/d\rho_0$ неотрицателен, что указывает на стабильность сформировавшихся заряженных структур. Очевидно, что при рассмотрении того же диапазона колебаний ρ_0 увеличение градиента электрического поля, то есть $\sqrt{E_0}$ может удерживать большую массу, что свидетельствует о повышенной стабильности звезды при небольших колебаниях плотности.



а б

Рисунок 1.5 – Зависимость солнечной массы M от центральной плотности ρ_0 для различных значений E_0 (а), и зависимость $dM/d\rho_0$ от функции ρ_0 (б) со значением постоянных параметров $S = 0.011\,км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\,км^{-4}$

Показатель адиабаты – это базовый критерий, который может быть дополнительно использован для оценки стабильности звезды. Показатель адиабаты плотности энергии может быть использован для описания типа УС. Следовательно, стабильность как релятивистских, так и нерелятивистских компактных структур определяется показателям адиабаты. Соотношение двух конкретных температур может быть использовано для определения Γ для релятивистской анизотропной структуры:

$$\Gamma = \frac{P_r + \rho}{P_r} v_r^0. \tag{1.39}$$

Модель звезды считается стабильной, если ньютоновская сфера удовлетворяет условию $\Gamma > 4/3$, тогда как нейтральное равновесие должно иметь $\Gamma > 4/3$ [30]. С учетом анизотропной природы вещества установлено, что для того, чтобы звездная система находилась в равновесии, необходим показатель адиабаты $\Gamma > 4/3$. После того, внесены несколько корректировок для сценария с релятивистской жидкостью, и они описаны как [14, p. 533–543]:

$$\Gamma > \frac{4}{3}\left(1 + \frac{\{4\Delta + \rho r^2 P_r\}}{4r|(P_r)|'}\right). \tag{1.40}$$

В этом случае первая часть в правой части уравнения (1.40) представляет анизотропию, в то время как вторая часть представляет релятивистские модификации гамильтоновой идеальной жидкости. В модели звезды показано только радиальные значения Γ, которые всегда превышают 4⁄3 (рисунок 1.6).

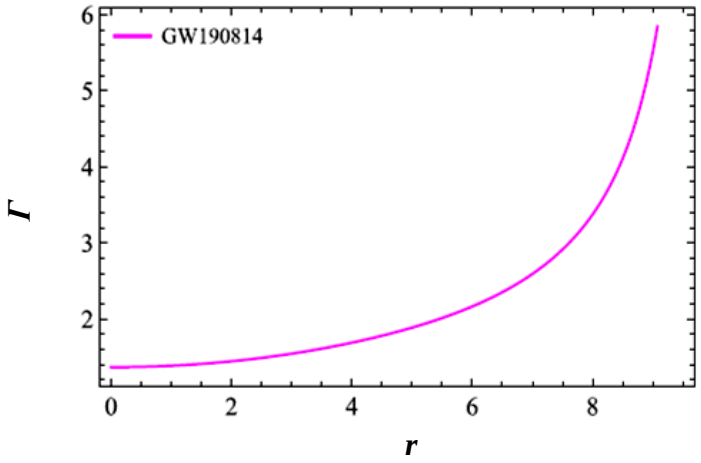


Рисунок 1.6 – Зависимость показателя адиабаты Γ от радиального расстояния r

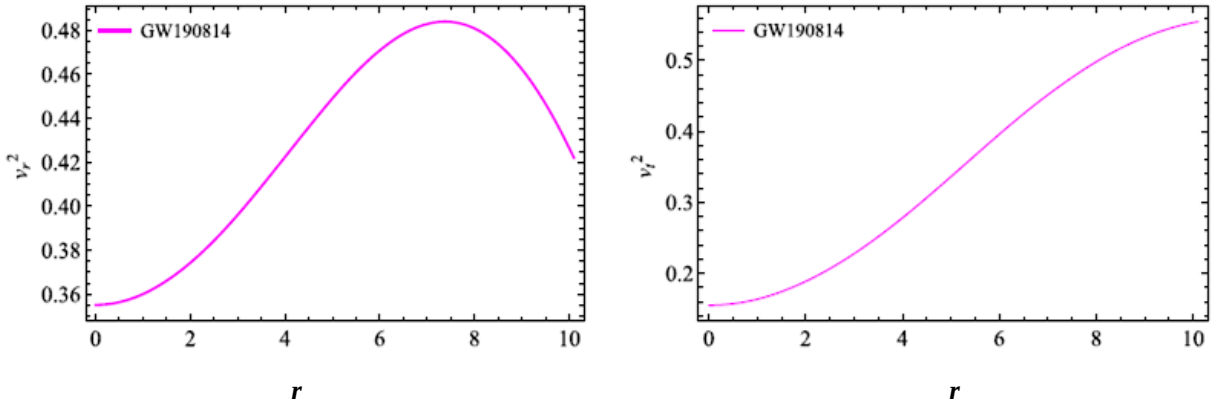
Примечание –Значения постоянных параметров $S = 0.011\,км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\,км^{-4}$

1.4.4 Причинность модели компактных двойных звезд

Чтобы скорость внутри заряженной жидкости не превышала скорость света в вакууме, важно, чтобы скорость звука оставалась неизменно меньше скорости света по всей звезде. Для сферы с заряженной жидкостью это подтверждается требованием, чтобы квадрат скоростей, представленных в виде υ_r^2 и υ_t^2, был меньше 1, выраженного как $\upsilon_i^2 = dP_r / d\rho$, где $i = \{r,t\}$. На рисинке 1.7 показано, что скорость звука постоянно остается ниже порогового значения 1 по всей внутренней области распределения звездного вещества. Таким образом, можно с уверенностью сказать, что данный жидкий объект соответствует критериям причинно-следственной связи по всему звездному объекту.

$$\begin{aligned}
\upsilon_r^2 = -\Big[&\left(r^2S+1\right)\Big(\left(L^2-N^2\right)\left(3\left(5E_0r^4+1\right)S^2+15E_0r^2S+\left(5E_0r^6+r^2\right)S^3+\right.\\
&\left.+5E_0\right)-2\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{\sqrt{2}}\right)\Big\{\sqrt{2}\sqrt{E_0}L^2S\left(r^2S+1\right)-LN\left(3\left(E_0r^4+1\right)\times\right.\\
&\left.\times S^2+3E_0r^2S+\left(E_0r^6+r^2\right)S^3+E_0\right)+\sqrt{2}\sqrt{E_0}N^2S\left(r^2S+1\right)\Big\}+\\
&+\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{\sqrt{2}}\right)\Big(L^2\left(3\left(E_0r^4+1\right)S^2+3E_0r^2S+\left(E_0r^6+r^2\right)S^3+\\
&+E_0\right)-4\sqrt{2}\sqrt{E_0}LNS\left(r^2S+1\right)+N^2\left(3\left(E_0r^4+1\right)S^2+3E_0r^2S+\left(E_0r^6+r^2\right)S^3+\\
&\left.+E_0\right)\Big)\Big)\Big]\times\Big[2\Big(3\left(2E_0r^4+5\right)S^2+4E_0r^2S+\left(E_0r^8+r^4\right)S^4+4\left(E_0r^6+r^2\right)S^3+\\
&+E_0\Big)\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{\sqrt{2}}\right)+N\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}r^2\left(r^2S+2\right)}{\sqrt{2}}\right)\right)^2\Big]^{-1},
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\upsilon_t^2 = -\Big[\big(L^2 - N^2\big)\big(5E_0 r^8 S^4 + 20E_0 r^6 S^3 + 6\big(5E_0 r^4 + 1\big)S^2 + 20E_0 r^2 S + 5E_0\big) +$$
$$+ \cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}\, r^2\big(r^2 S + 2\big)}{\sqrt{2}}\right) \times \Big\{L^2\big(E_0 r^8 S^4 + E_0 r^6 S^3 + 6\big(E_0 r^4 + 1\big)S^2 + 4E_0 r^2 S +$$
$$+ E_0\big) - 4\sqrt{2}\sqrt{E_0}\, LNS\big(r^2 S + 1\big)^2 + N^2\big(E_0 r^8 S^4 + 4E_0 r^6 S + 6\big(E_0 r^4 + 1\big)^3 +$$
$$+ 4E_0 r^2 S + E_0\big)\Big\} - 2\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}\, r^2\big(r^2 S + 2\big)}{\sqrt{2}}\right)\Big(-LN\big(E_0 r^8 S^4 + 4E_0 r^6 S^3 + \qquad (1.42)$$
$$+ 6\big(E_0 r^4 + 1\big)S^2 + 4E_0 r^2 S + E_0\big) + \sqrt{2}\sqrt{E_0}\, S\big(Lr^2 S + L\big)^2 + \sqrt{2}\sqrt{E_0}\, S +$$
$$+ \big(Nr^2 S + N\big)^2\Big)\Big] \times \Big[2\big(3\big(E_0 r^4 + 5\big)S^2 + 4E_0 r^2 S + \big(E_0 r^8 + r^4\big)S^4 + 4\big(E_0 r^6 + r^2\big)S^3 +$$
$$+ E_0\big) \times \left(L\cosh\left(\frac{\sqrt{E_0}\, r^2\big(r^2 S + 2\big)}{2\sqrt{2}}\right) + N\sinh\left(\frac{\sqrt{E_0}\, r^2\big(r^2 S + 2\big)}{2\sqrt{2}}\right)\right)^2\Big].$$



а б

Рисунок 1.7 – Изменение скорости звука υ_r^2 и υ_t^2 в зависимости от радиального расстояния r

Примечание – Значения постоянных параметров $S = 0.011\,км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\,км^{-4}$

1.5 Влияние параметра электрического заряда E_0 на давление, плотность и показатель адиабаты

Далее исследуется влияние параметра электрического заряда E_0 на ключевые термодинамические переменные: плотность энергии, радиальное и тангенциальное давления, а также показатель адиабаты. Это важная физическая особенность звездных систем, которая исследуется в дополнение к анализу стабильности заряженных моделей с помощью показателя адиабаты и поведения вышеупомянутых термодинамических переменных. Влияние параметра заряда E_0 на величины ρ, P_r, P_t, а также на показатель адиабаты Γ может быть математически объяснено путем небольших изменений его значения, в частности, в диапазоне от $E_0 = 0$ до $4\cdot10^{-6}$, (расчетные значения

физических величин для различных параметров электрического поля E_0 приведены в таблице 1.1).

Таблица 1.1 – Вычисленные значения физических величин при различных значениях параметра электрического поля E_0

E_0	Центральная плотность г/см^3	Поверхностная плотность г/см^3	Центральное давление дин/см^2	Γ	z_S
0	$3.5442\cdot10^{15}$	$6.56767\cdot10^{14}$	$1.13575\cdot10^{36}$	1.51563	1.12211
$1\cdot10^{-6}$	$3.5442\cdot10^{15}$	$6.51289\cdot10^{14}$	$9.97803\cdot10^{35}$	1.35678	1.12211
$2\cdot10^{-6}$	$3.5442\cdot10^{15}$	$6.45811\cdot10^{14}$	$8.68938\cdot10^{35}$	1.28889	1.12211
$3\cdot10^{-6}$	$3.5442\cdot10^{15}$	$6.40333\cdot10^{14}$	$7.48258\cdot10^{35}$	1.17077	1.12211
$4\cdot10^{-6}$	$3.5442\cdot10^{15}$	$6.34855\cdot10^{14}$	$6.34984\cdot10^{35}$	1.09661	1.12211

Из рисунка 1.8 видно, что при увеличении параметра электрического заряда E_0 радиальное и тангенциальное давления внутри звездной системы уменьшаются.

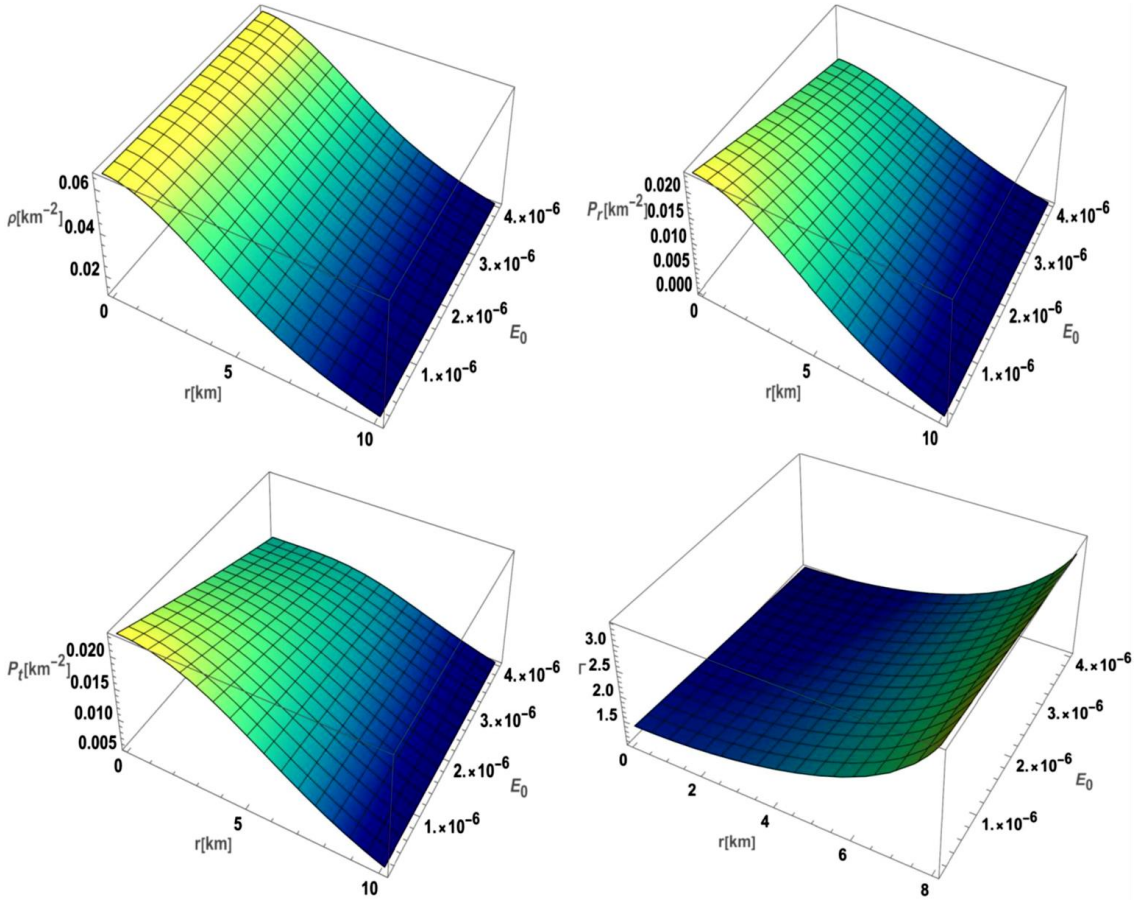


Рисунок 1.8 – Влияние параметра электрического заряда E_0 на плотность, давления и показатель адиабаты для значения постоянного параметра $S = 0.011\,км^{-2}$

Тем не менее, их влияние на глобальную плотность энергии системы довольно незначительно. Что более важно, наблюдение показывает, что центральное значение показателя адиабаты Γ уменьшается с увеличением параметра заряда E_0. Показатель адиабаты является важнейшей величиной, отражающей термодинамическую стабильность конфигурации звезды. Более высокий показатель адиабаты указывает на более стабильную систему, в то время как более низкое значение указывает на большую подверженность нестабильности звезды. Показано, что показатель адиабаты уменьшается с увеличением E_0, что подчеркивает решающую роль параметра электрического заряда в регулировании базовой стабильности звездной модели. Следовательно электрический заряд в звездной системе не может быть сколь угодно большим для поддержания стабильной структуры. Значение E_0 имеет максимальное значение, которые могут быть достигнуто до того, как система начнет становиться все более нестабильной и даже может разрушиться. Поэтому, чтобы гарантировать долгосрочную термодинамическую стабильность звездной модели, параметр электрического заряда E_0 должен быть тщательно ограничен и оптимизирован.

1.6 Предел компактности Андреассона и Бомера-Харко

Учет компактности, в частности соотношения массы и радиуса, имеет большое значение при анализе моделей стабильных самогравитирующихся КЗ. И наоборот, оптимальное соотношение массы и радиуса также играет важную роль в определении максимального красного смещения КО на поверхности. При распределении незаряженного вещества эффективная масса КО равна его общей массе. Однако в сценариях распределения заряженного вещества эффективная масса отличается. Это может быть объяснено следующими определениями:

– формула для определения эффективной массы в рамках ОТО для идеальной жидкости или анизотропного распределения вещества в КО выглядит следующим образом:

$$\hat{M}_0^{\text{eff}} = 4\pi\int_0^R r^2\rho(r)dr = \frac{R\left[B^2(R)-1\right]}{2B^2(R)} = \hat{M}_0. \tag{1.43}$$

– в контексте стандартной ОТО эффективная масса идеальной жидкости или анизотропной жидкости с распределением электрического заряда может быть определена следующим методом:

$$M^{\text{eff}} = 4\pi\int_0^R\left(\rho + \frac{q^2}{8\pi r^4}\right)r^2dr = \frac{R\left[B^2(R)-1\right]}{2B^2(R)}. \tag{1.44}$$

В этом контексте $\hat{M}_0^{\text{eff}}$ и M^{eff} представляют собой всю массу КО с радиусом R, соответствующим распределению незаряженного и заряженного

вещества соответственно. В работе [31] представлено максимально допустимое соотношение массы и радиуса в контексте изотропного идеального распределения жидкости, учитывая уменьшение плотности $\frac{\hat{M}_0}{R} \le \frac{4}{9}$. Однако введение электрического поля внутрь распределения вещества неизбежно приведет к изменению максимально допустимого соотношения массы и радиуса. В работах предложены максимальное и минимальное значения соотношения массы и радиуса при наличии электрического заряда [32,33]. Исходя из вышеупомянутых соображений, максимальные и минимальные пределы компактности могут быть выражены следующим неравенством в виде:

$$\frac{Q^2\left(18R^2+Q^2\right)}{2R^2\left(12R^2+Q^2\right)} \le \frac{M}{R} \le \frac{2}{9} + \frac{3Q^2+2R\sqrt{R^2+3Q^2}}{9R^2}, \tag{1.45}$$

где

$$M = m(R) = 4\pi\int_0^R \left(\rho + \frac{q^2}{8\pi r^4}\right) r^2 dr + \frac{Q^2}{2R}. \tag{1.46}$$

В следующем подразделе общая масса M будет переименована в невращающуюся массу M_{NR}.

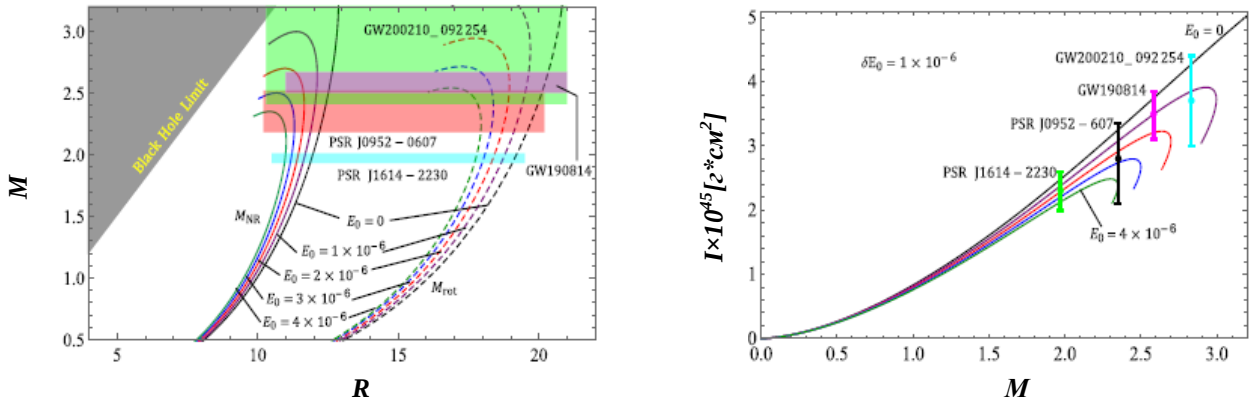
1.7 Эффект медленного вращения, момент инерции, кривая $M-R$ и уравнение состояния компактных звезд

Ньютоновская теория утверждает, что релятивистские объекты больше не неподвижны по отношению к астрономическим звездным телам. И наоборот, вращательное движение жидкости влияет на гравитационный объект, находящийся в данный момент под действием гравитационных сил. Исследование этого явления, основанное на принципах ОТО, было впервые проведено в работе [34]. В дальнейшем развитие данного направления позволило лучше понять его связь с принципом Маха [35]. Крайне важно точно определить скорость вращения, чтобы достичь равновесия между гравитационными силами, давлением и центробежными силами. В следующем анализе рассматривается влияние медленного вращения на эти конкретные структуры. Рентгенный анализ масс и радиусов радиопульсаров в настоящее время является развивающейся областью в наблюдательной астрофизике. Точное моделирование радиопульсаров требует определения момента инерции. Миллисекундный рентгеновский пульсар MAXI J1816–195 исследован в ходе недавних исследований с использованием телескопа NICER. Миллисекундный пульсар PSR J0514-4002E исследован с помощью телескопа KarooArray [36]. Кроме того, рентгеновские пульсары 1E 1145.1–6141 [37] и IGR J19294+1816 [38] проанализированы с использованием данных, полученных в рамках миссии NuSTAR.

Существует множество методов определения жесткости УС, включая вычисление показателя адиабаты или скорости звука. Однако графики $M-R$ и $I-M$ демонстрируют заметную зависимость от жесткости. График $I-M$ является точным и эффективным методом количественной оценки жесткости УС. Чтобы упростить сравнительный анализ с использованием кривой $I-M$, важно знать методологию, используемую для вычисления момента инерции I. Момент инерции I, соответствующий статическому решению, может быть рассчитан с использованием выражения, приведенного в работе [39]:

$$I=\frac{2}{9}\left(1+\frac{5\left(M_{NR}/R_{NR}\right).km}{M_{\Theta}}M_{NR}R_{NR}^{2}\right). \tag{1.47}$$

В связи с этим проведены исследования для количественной оценки влияния пульсаров на медленное вращение в рамках ОТО [22, p. 92-1-92-17]. Соотношение момента инерции и массы показано на правой панели рисунка 1.9 (таблица 1.2). Вращательное движение КЗ также создает дополнительную силу, связанную с моментом импульса и следовательно, может удерживаться больше массы [40].



а б

Рисунок 1.9 – Кривая $M-R$ (левая панель) и кривая $M-I$ (правая панель) для различных значений E_0 при значении постоянного параметра $S=0.011\,км^{-2}$

$$M_{rot}=M_{NR}+\frac{1}{2}I\Omega^{2}. \tag{1.48}$$

где Ω – скорость вращения, а M_{NR} – невращающаяся масса. Для простоты принимается максимально возможная частота, кеплеровская частота $\Omega_K=\sqrt{M_{NR}/R_{NR}^{2}}$ и используя (1.47), можно исследовать вращающуюся массу M_{rot}. Соответствующий корень R_{rot} может быть определен с помощью

соотношения Ченга-Харко, где $R_{rot}/R_{NR} \approx 1.626/R$ [41]. Соотношение $M_{rot} - R_{rot}$ можно увидеть на рисунке 1.9 левая часть.

Таблица 1.2 – Радиусы для выбранной группы массивных КЗ при различных значениях параметра электрического поля E_0

Объект	$M/M_\odot$	Радиус R_{NR} (км) при $E_0 \times 10^{-6}$				
		0	1	2	3	4
PSR J1614-2230	1.97 ± 0.04	$11.99^{+0.05}_{-0.05}$	$11.66^{+0.03}_{-0.06}$	$11.41^{+0.03}_{-0.03}$	$11.17^{+0.03}_{-0.03}$	$10.98^{+0.01}_{-0.03}$
PSR J0952-0607	2.35 ± 0.17	$12.33^{+0.39}_{-0.15}$	$11.66^{+0.10}_{-0.10}$	$11.64^{+0.01}_{-0.04}$	$11.28^{+0.01}_{-}$	$10.82^{+0.16}_{-}$
GW190814	2.5-2.67	$12.58^{+0.06}_{-0.07}$	$12.11^{+0.01}_{-0.03}$	$11.54^{+0.22}_{-0.05}$	-	-
GW200210	$2.83^{+0.47}_{-0.42}$	$12.74^{-}_{-0.32}$	$12.05^{-}_{-0.01}$	-	-	-
Примечание – Составлено по источникам [42-45]						

Продолжение таблицы 1.2

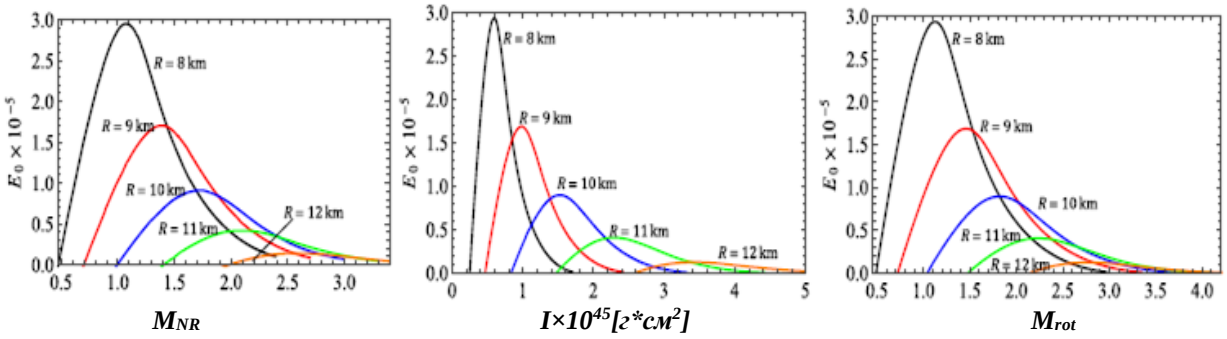
Объект	$M/M_\odot$	Радиус R_{rot} (км) при $E_0 \times 10^{-6}$				
		0	1	2	3	4
PSR J1614-2230	1.97 ± 0.04	$19.14^{+0.08}_{-0.08}$	$18.75^{+0.06}_{-0.10}$	$18.37^{+0.06}_{-0.08}$	$18.05^{+0.04}_{-0.06}$	$17.75^{+0.05}_{-0.04}$
PSR J0952-0607	2.35 ± 0.17	$19.90^{+0.27}_{-0.28}$	$19.38^{+0.20}_{-0.21}$	$18.87^{+0.07}_{-0.18}$	$18.33^{+0.10}_{-0.04}$	$17.86^{+0.01}_{-0.05}$
GW190814	2.5-2.67	$20.21^{+0.12}_{-0.11}$	$19.58^{+0.06}_{-0.07}$	$18.95^{+0.01}_{-0.02}$	$18.25^{+0.09}_{-0.31}$	-
GW200210	$2.83^{+0.47}_{-0.42}$	$20.54^{-}_{-0.11}$	$19.69^{-}_{-0.27}$	$18.69^{+0.21}_{-2}$	-	-

Невращающаяся масса и ее соотношение с R_{NR} могут быть определены из выражения (1.46) следующим образом:

$$M_{NR} = m(R_{NR}) = 4\pi \int_0^{R_{NR}} \left(\rho + \frac{q^2}{8\pi r^4} \right) r^2 dr + \frac{Q^2}{2R_{NR}}. \qquad (1.49)$$

Кроме того, центробежная сила, возникающая при вращении барабана, приводит к увеличению радиуса вращения, что приводит к вращению $R_{rot} > R_{NR}$. На рисунке 1.9 показано, что масса, приобретаемая медленно вращающейся звездой, превосходит массу невращающейся звезды при всех значениях E_0. Это происходит потому, что к энергии вращения добавляется массовый член, а к энергии вращения прибавляется $\frac{1}{2} I\Omega^2$ - член. Очень удивительно обнаружить, что электрическое поле на радиальное расстояние, то есть $E/r = \sqrt{E_0}$, является максимальным при определенной массе для выбранного радиуса (рисунок 1.10 а). Также можно отметить, что параметр E/r максимален при меньшем моменте инерции, что означает, что электрический заряд более компактно удерживается при меньших радиусах и меньшем вращении, рисунок 1.10 (б). Это видно из рисунка 1.10 в виде $\left[r, M_{NR}(M_\odot), \sqrt{E_0^{\max}} \cdot 10^{-4} \left(/км^4\right)\right]$≡ [8, 1.08, 0.54], [9,

1.39, 0.41], [10, 1.74, 0.30], [11, 2.09, 0.20] и [12, 2.61, 0.11]. Аналогичные тенденции также можно найти для $\left[r, I,\ \sqrt{E_0^{\max}} \cdot 10^{-4}\left(/км^4\right)\right]$ и $\left[r, M_{rot}\left(M_\Theta\right),\ \sqrt{E_0^{\max}} \cdot 10^{-4}\left(/км^4\right)\right]$.



а б в

Рисунок 1.10 – Пики параметра электрического заряда $\left(E_0\right)$ для различных масс и радиусов звезд, а также момент инерции при значении постоянного параметра $S = 0.011\,км^{-2}$

Термодинамическая зависимость между P_r и ρ или, что эквивалентно, УС показана на рисунке 1.11, которая имеет квадратичную форму $P_r = a\rho - b\rho^2 - c$ при $a, b, c > 0$. Соответствующие параметры приведены ниже:

$$E_0 = 1\cdot 10^{-6} : a = 0.4957, b = -4.6756\cdot 10^{-5}\,\text{фм}^3/\text{МэВ}, c = 178.498\,\text{МэВ/фм}^3$$
$$E_0 = 2\cdot 10^{-6} : a = 0.4455, b = -4.6594\cdot 10^{-5}\,\text{фм}^3/\text{МэВ}, c = 159.353\,\text{МэВ/фм}^3$$
$$E_0 = 3\cdot 10^{-6} : a = 0.3979, b = -4.6504\cdot 10^{-5}\,\text{фм}^3/\text{МэВ}, c = 140.853\,\text{МэВ/фм}^3$$
$$E_0 = 4\cdot 10^{-6} : a = 0.3476, b = -4.3576\cdot 10^{-5}\,\text{фм}^3/\text{МэВ}, c = 122.713\,\text{МэВ/фм}^3$$

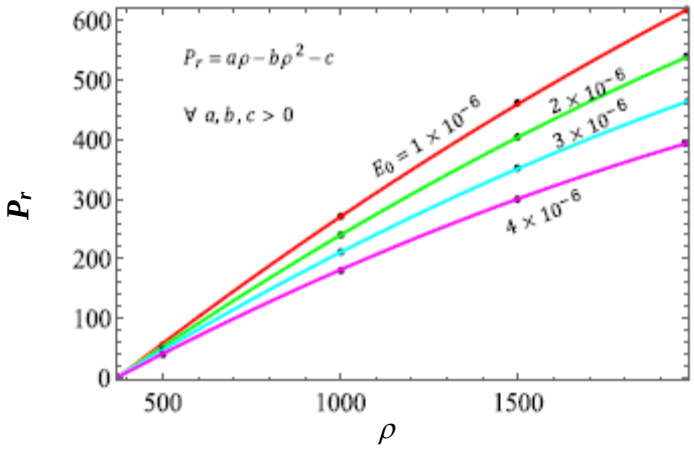


Рисунок 1.11 – Уравнение форм состояний относительно E_0

Квадратичный член УС вносит вклад в отрицательное давление, что подразумевает отталкивающую природу. Тип УС при $c = 0$ использован для

построения космологических моделей [46]. Астрофизические аспекты УС: $P_r = a\rho - b\rho^2$ также использовались при анализе КЗ, содержащих обычную материю, твердую жидкость, темную энергию, космические струны и экзотические вещества [47]. УС содержит кварковую материю, темную энергию и экзотические вещества.

Вывод по первому разделу

Согласно измерениям, проведенным коллаборациями LIGO и Virgo [48], которые наложили ограничения на пространство параметров модифицированной гравитации и максимальную массу гравитона, а модификации включают корректировку уравнений ТОВ, что потенциально может привести к получению НЗ с более высокой массой, чем предсказывает ОТО. В этом отношении предложена скалярно-векторно-тензорная теория гравитации в качестве модифицированной основы гравитации, а также исследованы последствия модифицированной гравитации [49]. В связи с этим исследованы возможное влияние градиентов электрического поля на массу, радиус, стабильность и момент инерции массивного вторичного объекта, недавно обнаруженного в результате слияния КЗ GW190814. Наблюдалось, как градиенты электрического поля в экстремальном гравитационном поле этих систем влияли на их характеристики вторичного объекта. Коллаборации LIGO и Virgo точно измерили радиус и массу объекта GW190814 [50]. Наблюдение слияния компактной двойной системы позволило получить строгие оценки физических свойств этого события, основанные на теоретических предсказаниях.

В данном разделе выведены общие релятивистские уравнения для распределения заряженной материи и следовательно, выбраны три условия для получения решения в замкнутой форме. Здесь рассматривается метрическая функция $B_0(r)$, параметр анизотропии Δ и электрическое поле $E(r)$, где эти параметры используются для выражения всех соответствующих физических величин. Предложенная модель тщательно протестирована на физическую корректность в рамках КЗ GW190814, которая имеет радиус $R = 10.1 км$ и постоянные значения параметров при $S = 0.011 км^{-2}$ и $E_0 = 10^{-6}\ км^{-4}$. Проанализированы метрические потенциалы модели, электрический заряд, плотность энергии, радиальные и тангенциальные давления, а также анизотропный параметр. Благодаря этому всестороннему анализу обнаружено, что метрические потенциалы A_0^2 и B_0^2 тщательно согласуются с параметрами внешнего вакуума Шварцшильда на поверхности звезды, радиус которой составляет $R = 10.1 км$. Важно отметить, что метрические потенциалы демонстрируют плавное поведение и поддерживают конечные значения по всей внутренней области $(r < R)$ КЗ GW190814. Электрический заряд внутри КЗ GW190814 начинается с нуля в ядре и неуклонно возрастает к границе, достигая максимума именно на поверхности звезды. Это указывает на то, что электрическая сила действует вовне внутри звезды, при этом суммарный заряд

на поверхности, по расчетам, составляет $1.20123 \cdot 10^{20}$ *Кл*. Кроме того, плотность энергии остается постоянной, а ее максимальное значение находится в центре всей внутренней части КЗ GW190814. Радиальное и тангенциальное давление внутри конфигурации соответствуют изменению плотности, оставаясь постоянными по всей внутренней части и монотонно уменьшаясь с увеличением радиальной координаты *r*. Примечательно, что в центральной области звезды наблюдается более высокое радиальное и тангенциальное давление, которое постепенно уменьшается по направлению к поверхности звезды, что соответствует ожиданиям. Важно отметить, что на поверхности звезды радиальное давление достигает нуля, как и ожидалось, и в соответствии с учетом физических требований. Кроме того, параметр анизотропии демонстрирует нормальное поведение - он исчезает в центре конфигурации, указывая на баланс между радиальным и тангенциальным давлениями, но его величина растет по мере продвижения к границе, что приводит к большей стабильности поверхностных слоев КЗ GW190814. Важно отметить, что условие равновесия системы гласит, что сумма всех действующих на нее сил равна нулю, $F_a + F_h + F_g + F_e = 0$. Это означает, что система находится в равновесии, при этом все отдельные силы, действующие на него, уравновешены, и объект не вращается и не ускоряется. Более того, энергетические условия WEC, NEC и SEC положительны, и анализ сосредоточен на DEC. Результаты показывают, что заряженная анизотропная модель выполняет все энергетические условия, обеспечивая конструктивную осуществимость объекта.

Стабильность предложенной заряженной модели протестирована с помощью критериев ХЗН, показателя адиабаты и причинно-следственной связи, что одновременно подтвердило стабильность модели. Также рассмотрено влияние параметра электрического заряда E_0 на ключевые термодинамические переменные, то есть плотность энергии, радиальное и тангенциальное давления, и показатель адиабаты. Анализ показывает, что при увеличении параметра электрического заряда E_0 с 0 до $4 \cdot 10^{-6}$ радиальное и тангенциальное давления уменьшаются, в то время как плотность энергии изменяется незначительно. Важно отметить, что центральный показатель адиабаты Γ уменьшается с увеличением E_0, что указывает на то, что электрический заряд играет ключевую роль в стабильности звездной модели. Электрический заряд не может быть сколь угодно большим для поддержания стабильности, поэтому параметр заряда должен быть тщательно ограничен и оптимизирован для обеспечения долгосрочной термодинамической стабильности системы. Кроме того, оптимальное соотношение массы и радиуса, которое играет важную роль в определении максимального поверхностного красного смещения КО [27, p. 999–1008; 28, p. 3–207]. Существует множество методов определения жесткости УС, включая вычисление показателя адиабаты или скорости звука. Однако графики $M - R$ и $I - M$ демонстрируют заметную чувствительность к жесткости. Кривая $I - M$ является точной и эффективной для количественной

оценки жесткости УС. Между тем, вращательное движение КЗ также создает дополнительную силу, связанную с моментом импульса. В этом отношении показаны, что масса, полученная для медленно вращающейся звезды, больше массы невращающейся звезды при всех значений E_0. Это происходит потому, что к энергии вращения добавляется массовый член $\frac{1}{2}I\Omega^2$. Очень удивительно обнаружить, что электрическое поле на радиальное расстояние, то есть $E^2/r^2 = \sqrt{E_0}$ является максимальным при определенной массе для выбранного радиуса. В частности, следующие значения $\left[r, M_{NR}(M_\Theta), \sqrt{E_0^{\max}} \cdot 10^{-4}\left(/км^4\right)\right]\equiv$ [8, 1.08, 0.54], [9, 1.39, 0.41], [10, 1.74, 0.30], [11, 2.09, 0.20] и [12, 2.61, 0.11]. Аналогичные тенденции также можно найти для $\left[r, I, \sqrt{E_0^{\max}} \cdot 10^{-4}\left(/км^4\right)\right]$ и $\left[r, M_{rot}(M_\Theta), \sqrt{E_0^{\max}} \cdot 10^{-4}\left(/км^4\right)\right]$. УС, соответствующая этому решению, имеет вид $P_r = a\rho - b\rho^2 - c$, что указывает на то, что состав вещества включает кварковую материю, темную энергию и экзотические вещества.

Таким образом в этом разделе исследовано возможное влияние градиентов электрического поля на массу, радиус, устойчивость и момент инерции массивного вторичного объекта, обнаруженного в составе системы GW190814. Продемонстрировано, каким образом градиенты электрического поля изменяются в условиях сильных гравитационных и электромагнитных полей, характерных для подобных компактных систем.

2 АНИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ ЗВЕЗД В ТЕОРИИ *F(R)* ГРАВИТАЦИИ

Компактные звездные объекты, такие как НЗ, белые карлики и ЧД, которые возникают в результате гравитационного коллапса, вызванного давлением вырождения релятивистской материи, широко распространены в астрофизике. Несмотря на свои относительно небольшие объемы, эти объекты обладают удивительно высокой плотностью благодаря своей массивной природе. Хотя точные характеристики этих КЗ остаются неясными, обычно считается, что это массивные звезды с компактными размерами. За исключением ЧД, все типы звездных объектов обычно классифицируются как вырожденные звезды. Изучение равновесной конфигурации КЗ в рамках различных гравитационных теорий имеет большое значение, учитывая их массивную природу и высокую плотность. Следовательно, изучение КО, основанное как на ОТО, так и на МТГ, остается неизменно интересной и ключевой областью исследований в астрофизике. Изучение моделирования компактных небесных структур требует получения точных решений уравнений поля Эйнштейна. Для получения сложных точных решений уравнений поля Эйнштейна были предложены различные гравитационные теории. Исследуя реалистичные модели звездных объектов, Толман и Оппенгеймер [18,p. 364–372; 19, p. 374–380] утверждали, что физические характеристики этих объектов представляют собой хрупкий баланс между внутренним давлением и гравитационными силами, что приводит к равновесным структурам. Это явление имеет особое значение для понимания внутренней конфигурации звезд, часто приводя к реалистичным результатам. Кроме того, Бааде и Цвикки подробно исследовали компактные небесные структуры и предположили, что сверхновые могут эволюционировать в более мелкие КО, основываясь на наблюдении сильно намагниченных вращающихся нейтронов [51].

В области астрофизических исследований была выдвинута гипотеза о существовании идеальной жидкости, которая могла бы служить предшественником для формирования небесных структур и рождения звездных образований. Эти образования обычно описываются как чрезвычайно плотные, изотропные небесные тела, обладающие очевидной сферической симметрией. Хотя изотропия часто рассматривается как желательная характеристика, она не является универсальной для КЗ. В настоящее время нет полного описания чрезвычайно плотной материи в режиме, где преобладают сильные взаимодействия. Потенциальное теоретическое описание ядерной материи с чрезвычайно высокой плотностью может включать не только лептоны и нуклоны, но и множество экзотических составляющих в различных состояниях и фазах, таких как гипероны, мезоны, барионные резонансы и СКМ. Таким образом, точное распределение вещества внутри КО по-прежнему остается предметом дальнейших исследований. Изотропная жидкость обычно считается наиболее типичным сферически-симметричным распределением вещества, поскольку оно согласуется с данными о звездах, показывающими изотропную

природу. С другой стороны, ожидается, что анизотропные жидкости или неодинаковые главные напряжения будут возникать, когда плотность КО обычно превышает плотность ядерного вещества. Наличие двух различных типов давления - тангенциального P_t и радиального P_r, внутри объектов [52] приводит к анизотропии системы.

Концепция введения ненулевой анизотропии в конфигурации звезд была впервые предложена Бауэрсом и Лиангом [53]. Кроме того, в работе [54] определили, что ядерная плотность в ядре звездных объектов проявляет анизотропное поведение, и исследовали идею о том, что звезды могут достигать огромных плотностей $10^{15}\,г/см^3$, когда ядерная материя проявляет анизотропные свойства. Распределение анизотропной материи имеет решающее значение для понимания внутренней структуры и этапов эволюции релятивистских звездных объектов. Примечательно, что распределение анизотропного вещества играет ключевую роль в выяснении внутренней структуры и этапов эволюции релятивистских звездных объектов. Кроме того, учет анизотропных составляющих давления позволяет нам получить более точные результаты. Однако в ситуациях, когда величина анизотропии давления достаточно мала для поддержания общих характеристик данной модели, изотропию давления можно рассматривать как приближение. В связи с этим Эррера [55] подробно обсуждает этот вопрос, объясняя, что рассеяние энергии во время эволюции звезды приводит к исчезновению изотропного давления в начальной конфигурации, в результате чего система становится анизотропной. Существующая анизотропная система не потеряет своей приобретенной анизотропии на последнем этапе динамического развития. В данном исследовании он определяет, является ли условие изотропного давления стабильным или нестабильным в схлопывающихся сферически-симметричных диссипативных распределениях жидкости. Обнаружено, что диссипативные потоки, вариации плотности энергии и наличие сдвига в потоке жидкости приводят к отклонению изначально изотропной конфигурации от этого состояния, что приводит к анизотропии давления. Данное рассеяние происходит в результате испускания безмассовых частиц, таких как фотоны или нейтрино, и является одной из важных характеристик процесса эволюции массивных звезд. Кроме того, излучение нейтрино дает правдоподобное объяснение механизму, с помощью которого большая часть энергии связи уносится во время коллапса звезд, что в конечном итоге приводит к образованию НЗ или ЧД. Недавно Хан и Юсуф, и их соавторы исследовали заряженные анизотропные модели без сложной структуры, а также звездные конфигурации с гравитационной развязкой посредством минимальной геометрической деформации [56].

МТГ возникли как способы рассмотрения наблюдаемых событий, которые классическая ОТО изо всех сил пытается полностью объяснить. Несмотря на значительные успехи ОТО в понимании многих гравитационных явлений, нерешенные вопросы и неожиданные результаты стимулировали исследования альтернативных теорий гравитации, таких как

$F(R), F(R,T), F(G), F(R,G)$ и других. Среди них теория $F(R)$ гравитации особенно примечательна, поскольку является одной из самых простых и наиболее широко применяемых, определяемой как функция скаляра Риччи. В области $F(R)$гравитации корректировка ОТО производится путем включения функции скаляра Риччи, обозначаемой как R , в действие Эйнштейна-Гильберта. Это включение отражает динамику физической системы и использовало различные модели в рамках $F(R)$ гравитации, где кривизна выражается как функция скаляра Риччи [57, 58]. Кроме того, Старобинский [59] предложил ряд гравитационных моделей $F(R)$ гравитации которые демонстрируют физически приемлемые результаты при сравнении с наблюдательными данными, связанными со структурой Солнца. В 21 веке гравитация вновь привлекла к себе внимание благодаря своему потенциалу объяснять наблюдаемое ускорение расширения Вселенной без привлечения темной энергии. В многочисленных исследованиях подробно изучалась мотивация и обоснованность различных функциональных форм $F(R)$, а также их применение и ограничения [60]. Когнола и другие [61] провели тщательное исследование осуществимости физических свойств КЗ, проанализировав модели экспоненциального типа в рамках $F(R)$- гравитации.

Кроме того, в работе [62] обсудили анализ устойчивости анизотропных звездных структур в условиях $F(R)$ - гравитации. КЗ Бардина, находящиеся в конформном движении под действием $F(R)$ - гравитации, были изучены в работе [63]. Эти исследования в основном включали численные расчеты конкретных параметров с использованием условий, при этом предполагалось, что другие параметры имеют заранее определенные численные значения, соответствующие критериям модели.

Анизотропные КЗ в $F(R)$ - гравитации изучаются с использованием обобщенных условий Дармуа-Израэля. Применяя эти сложные условия, успешно получены численные значения для всех параметров модели, связанных с известными КЗ, а именно: *4U1538-52, SAX J 1808.4-3658, EXO 1785-248, Cen X-3, 4U1820-30, PSR J1903+327, 4U1608-52* и *PSR J 1614-2230*. Результаты модели демонстрируют ее существенное соответствие естественному поведению и физическую осуществимость в пределах заданных значений параметров. Для достижения целей исследованы две гравитационные модели $F(R)$ гравитации, предложенные Когнолой и соавторами [61, p. 046009], включающий метрический потенциал Дургапала и Фулории [64,65] в контексте анизотропного давления.

2.1 Метрический формализм и основные уравнения в $F(R)$ гравитации

Теория $F(R)$ гравитации является важной и инновационной структурой, которая расширяет действие Эйнштейна-Гильберта путем включения скалярной функции Риччи [57, p. 1–7]. При применении к звездной системе исследователи заметили, что $F(R)$ гравитация не только предотвращает

образование центральной сингулярности во время коллапса, но и замедляет коллапс в целом [66]. Эта модификация влечет за собой замену скаляра Риччи R функцией $F(R)$, что приводит к формулировке действия теории гравитационного поля в $F(R)$ гравитации следующим образом [67]:

$$S=\int\left[\frac{F(R)}{2\chi}+L_m\right]\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{2.1}$$

где $F(R)$ – любая произвольная функция скалярной кривизны $R=g^{ij}R_{ij}$, тензор Риччи задается как $R_{ij}=R^h_{ijh}$, ; g – детерминант метрического тензора g_{ij} $(i,j=0,1,2,3)$; χ – константа гравитационной связи; m – лагранжиан полей материи.

Варьирование действия (2.1) относительно метрического тензора g_{ij} дает следующее уравнение поля:

$$f(R)R_{ij}-\frac{1}{2}F(R)g_{ij}-\left[\nabla_i\nabla_j-g_{ij}W\right]f(R)=\chi T_{ij}, \tag{2.2}$$

где $\chi=\frac{8\pi G}{c^4}$, $f(R)=\frac{dF}{dR}$, $W\equiv\nabla^i\nabla_i$ – гравитационная постоянная связи, ∇_i представляет собой ковариантную производную, а T_{ij} – тензор энергии-импульса, определяемый как:

$$T_{ij}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta L_m}{\delta g^{ij}}. \tag{2.3}$$

Рассматривается тензор энергии-импульса, описывающий распределение вещества внутри звездной системы как идеальной жидкости:

$$T_{ij}=(\rho+p_r)V_iV_j+p_tg_{ij}+(p_r-p_t)\chi_i\chi_j \tag{2.4}$$

где ρ,P_r и P_t – соответственно плотность энергии, радиальное и тангенциальное давление распределения жидкости; V^i – это временной вектор четырех скоростей; χ^i – единичный пространственно-подобный вектор в радиальном направлении, которые удовлетворяют:

$$V_iV_j=1,\chi_i\chi_j=-1. \tag{2.5}$$

Статическая сферически симметричная конфигурация стала фокусом для физиков-теоретиков, поскольку они стремятся разработать внутреннюю звездную модель для КЗ. Исследование посвящено компактным звездным

объектам, используя сферически симметричную метрику в традиционной сопутствующей системе координат и интегрируя анизотропные распределения жидкости (принимая $c = G = 1$):

$$ds_{-}^{2} = e^{\omega(r)}dt^{2} - e^{\mu(r)}dr^{2} - r^{2}\left(d\theta^{2} + \sin^{2}\theta d\phi^{2}\right), \tag{2.6}$$

где $\omega(r), \mu(r)$ – метрические потенциалы, которые являются функцией только радиальной координаты, а координаты, в данном случае $x^{i} = (t, r, \theta, \phi)$.

Таким образом, уравнения гравитационного поля $F(R)$ (2.2) для метрики (2.6) дают следующие уравнения в $F(R)$ гравитации:

$$\begin{aligned} 8\pi\rho = \frac{e^{-\mu}}{4r}\Big[&-2rF(R)e^{\mu} - 4rf''(R) - 2f'(R)\left(r\mu'+4\right) - \\ &- rf(R)\mu'\omega' + 2rf(R)\omega'' + rf(R)\omega'^{2} + 4f(R)\omega'\Big], \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} 8\pi P_{r} = \frac{e^{-\mu}}{4r}\Big[&2rF(R)e^{\mu} + 2f'(R)\left(2r\mu'+r\omega'+4\right) + \\ &+ f(R)\left(\mu'\left(r\omega'+4\right) - r\left(2\omega''+\omega'^{2}\right)\right)\Big], \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} 8\pi P_{t} = \frac{e^{-\mu}}{2r^{2}}\Big[&r^{2}F(R)e^{\mu} + r\left(2rf''(R) + f'(R)\left(r\mu'+r\omega'+2\right)\right) + \\ &+ f(R)\left(r\mu'+2e^{\mu} - r\omega'-2\right)\Big], \end{aligned} \tag{2.9}$$

где штрих (') обозначает дифференцирование по радиальной координате r, $f'(R) = \frac{df}{dR}R'$, $f''(R) = R''\frac{df}{dR} + R'^{2}\frac{d^{2}f}{dR}R^{2}$, и считается, что тензор энергии-импульса имеет анизотропную природу.

В физических литературах анизотропное давление определяется изменением направления распределения жидкости. Однако, учитывая конкретные правдоподобные сценарии, анизотропия давления может проявляться как Δ, то указывает на анизотропную природу звездного тела. Анизотропия давления для данной статической модели конфигурации равна

$$\Delta = 8\pi P_{t} - 8\pi P_{r}. \tag{2.10}$$

Из уравнений (2.8) и (2.9) следует:

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{e^{-\mu}}{4r^{2}}\Big[&f(R)\left(2r^{2}\omega''+r^{2}\omega'^{2} - r\mu'(r\omega'+2) + 4e^{\mu} - 2r\omega'-4\right) - \\ &- 2r\left(f'(R)(r\mu'+2) - 2rf''(R)\right)\Big]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Функция масс звездной системы имеет вид [68]:

$$m(r)=\frac{1}{2}r^3R_{23}^{23}=\frac{1}{2}r\left(1-e^{-\mu(r)}\right), \tag{2.12}$$

где R_{23}^{23}– компонент тензора кривизны Римана для внутренней метрики (2.6).

2.2 Граничные условия в модифицированной $F(R)$ гравитации

Согласно теореме Джебсена-Биркгофа, решение уравнений вакуумного поля Эйнштейна, описывающих гравитационное поле вокруг объекта со сферической симметрией, задается метрикой Шварцшильда [69,70]. Для изучения компактных звездных систем обычно рассматривается внешнее пространство-время, характеризуемое геометрией Шварцшильда, с ее метрикой, определяемой следующим образом:

$$ds_+^2=\left(1-\frac{2M}{\mathbf{r}}\right)dT^2-\left(1-\frac{2M}{\mathbf{r}}\right)^{-1}d\mathbf{r}^2-\mathbf{r}^2\left(d\theta^2+sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{2.13}$$

где M – ньютоновская масса звезды (также известную как масса Шварцшильда), а координаты внешнего пространства-времени равны $x_+^i=(T,\mathbf{r},\theta,\phi)$. Здесь обсуждаются условия в теориях $F(R)$ гравитации, называемые «обобщенными условиями Дармуа-Израэля».

Эти условия имеют решающее значение для изучения звездных моделей, включая вакуумную область, окружающую стабильную звездную сущность. Из-за их важности для понимания гравитационного коллапса в рамках этой нелинейной теории $F(R)$ гравитации, эти условия играют решающую роль в качестве граничных условий, относящихся к широкому диапазону звездных систем. Ниже будет рассматриваться плавная связь между внутренним пространством-временем $\left(ds_-^2\right)$ (как описано метрикой (2.6)) и внешним многообразием $\left(ds_+^2\right)$ через гиперповерхность Σ . Эта граничная гиперповерхность Σ делит сферически симметричную звездную систему на внутренние $\left(ds_-^2\right)$ и внешние $\left(ds_+^2\right)$ области пространства-времени. Условия перехода в теории $F(R)$ гравитации отличаются от условий в ОТО. В дополнение к известным условиям перехода Дармуа-Израэля в ОТО [24, p. 2-46; 25, p. 1-13], нелинейная метрика $F(R)$ гравитации требует соблюдения некоторых дополнительных ограничений для того, чтобы данное соответствие было осуществимым.

Первое условие: непрерывность метрики по Σ :$r=R_0$, то есть $\left(ds_-^2\right)_\Sigma=\left(ds_+^2\right)_\Sigma$, что дает:

$$e^{\omega}\overset{\Sigma}{=}\left(1-\frac{2M}{R_0}\right), \tag{2.14}$$

$$e^{\mu} \overset{\Sigma}{=} \left(1-\frac{2M}{R_0}\right)^{-1}. \tag{2.15}$$

Второе условие: непрерывность внешней кривизны по Σ, то есть, $K_{ij}^{+} \overset{\Sigma}{=} K_{ij}^{-}$, где K_{ij} - внешняя кривизна, определяемая как:

$$K_{ij}^{\pm} = -N_k^{\pm}\left(\frac{\partial^2 x_{\pm}^k}{\partial\xi^i\partial\xi^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{\partial x_{\pm}^{\alpha}}{\partial\xi^i}\frac{\partial x_{\pm}^{\beta}}{\partial\xi^j}\right), \tag{2.16}$$

где $k,\alpha,\beta = 0,1,2,3$ и $N_k^{\pm}$ – компоненты единичных нормалей к Σ в координатах $x_{\pm}^i$, задаются выражением:

$$N_k^{+} \overset{\Sigma}{=} \left(-\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \frac{dT}{d\tau}, 0, 0\right) \text{ и } N_k^{-} \overset{\Sigma}{=} \left(0, e^{\frac{\mu}{2}}, 0, 0\right). \tag{2.17}$$

Компоненты внешней кривизны K_{ij} равны:

$$K_{00}^{-} \overset{\Sigma}{=} -\frac{1}{2}\omega' e^{-\frac{\mu}{2}}, \tag{2.18}$$

$$K_{22}^{-} \overset{\Sigma}{=} re^{-\frac{\mu}{2}} = K_{33}^{-}\csc^2\theta, \tag{2.19}$$

$$K_{00}^{+} \overset{\Sigma}{=} \left[\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\frac{d^2T}{d\tau^2} - \frac{dT}{d\tau}\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} + \frac{3M}{\mathbf{r}(\mathbf{r}-2M)}\frac{dT}{d\tau}\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)^2 - \frac{M(\mathbf{r}-2M)}{\mathbf{r}^3}\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^3\right], \tag{2.20}$$

$$K_{22}^{+} \overset{\Sigma}{=} (\mathbf{r}-2M)\frac{dT}{d\tau} = K_{33}^{+}\csc^2\theta. \tag{2.21}$$

Условие $K_{00}^{-} \overset{\Sigma}{=} K_{00}^{+}$ дает:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\frac{d^2T}{d\tau^2} - \frac{dT}{d\tau}\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} + \frac{3M}{\mathbf{r}(\mathbf{r}-2M)}\frac{dT}{d\tau}\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)^2 - \frac{M(\mathbf{r}-2M)}{\mathbf{r}^3}\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^3 = 0. \tag{2.22}$$

Теперь, подставляя значения из уравнений (2.14) - (2.15) и используя уравнение (2.8) в уравнение (2.22):

$$8\pi P_r + \frac{1}{2}(F - RF) + f'\left[\frac{2}{r} + \frac{1}{2}(2*\mu' + \omega')e^{-\mu}\right]^{\Sigma} = 0. \qquad (2.23)$$

Из уравнения (2.23) видно, что давление остается значительным на границе Σ, будучи напрямую связанным с нелинейными аспектами $F(R)$ гравитации. Эти дополнительные нелинейные члены могут возникать из-за возросшей сложности геометрии кривизны в $F(R)$ гравитации. В частности, когда $F(R) = R$, уравнение (2.23) упрощается до $P_r = 0$, представляя широко признанное классическое условие Дармуа-Израэля в рамках теории ОТО.

Равенство $K_{22}^{-} \overset{\Sigma}{=} K_{22}^{+}$ приводит к выводу уравнения (1.15). Эта аналогия напоминает принцип в ОТО, где функция масс $m(r)$ должна соответствовать массе Шварцшильда M на границе Σ, где $r = R_0$.

Теоретически граничные условия используются для оценки численного значения произвольных констант и параметров модели. Следовательно, можно установить произвольные константы и параметры модели в данных исследованиях посредством применения этих условий (2.14) - (2.15) и (2.23).

2.3 Метрические потенциалы и их закономерность

Система уравнений поля, представленная уравнениями (2.7)-(2.9), состоит из трех уравнений, включающих пять неизвестных: ρ, P_r, P_t, ω и μ. Таким образом, чтобы получить точное решение, допустимо выбрать любые две из этих переменных независимо. Ниже будет исследован метрический потенциал в следующих формах [64, p. 671–680; 65, p. 225-1-225-11]:

$$e^{\mu} = \frac{7 + 14Ar^2 + 7A^2r^4}{7 - 10Ar^2 - A^2r^4} \text{ и } \omega = 2\log\left(1 - K + Ar^2\right)^2, \qquad (2.24)$$

где A – константа, а K – описывает параметры модели. Важно подчеркнуть, что если K равно нулю, то приведенные выше метрические функции, приведенные в уравнении (2.24), будут представлять решение для идеального распределения жидкой материи в рамках ОТО, а также настоящего сценария теории $F(R)$ гравитации. Поэтому приняты ненулевые значения параметра K, чтобы найти решение для анизотропного распределения материи в настоящем сценарии $F(R)$ гравитации. Кроме того, выбор упомянутых выше метрических потенциалов соответствует критериям регулярности для модели стабильной КЗ. Ниже изложены основные условия для физически приемлемой модели $F(R)$ гравитации, обеспечивающей регулярность компактных звездных объектов:

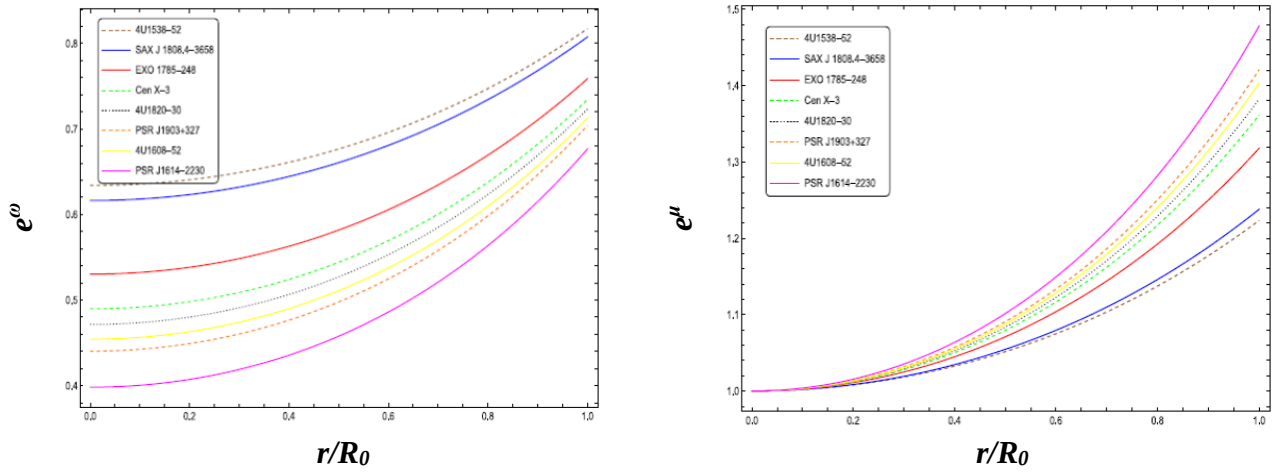
1. Метрические компоненты g_{00} и g_{11} должны быть гладкими и не иметь сингулярностей. В частности, для анизотропной жидкой сферы они должны соответствовать условиям $e^{\mu} = 1$ и $e^{\lambda} = const$ в центре $r = 0$ (рисунок 2.1).

2. Физические параметры ρ, P_r и P_t сохраняют постоянную регулярность, конечность и положительность. Кроме того, ожидается, что эти переменные достигнут своих максимальных значений в центральной точке $r = 0$ и будут демонстрировать убывающую картину к границе при $r = R_0$.

3. Параметры УС должны удовлетворять решающему требованию $0 < \omega_r \leq 1$ и $0 < \omega_t \leq 1$, при этом $P_r = \omega_r \rho$ и $P_t = \omega_t \rho$.

4. Скорости звука внутри звездных структур должны оставаться ниже скорости света (c), что означает, что $0 < \upsilon_r^2 < 1$ и $0 < \upsilon_t^2 < 1$, где υ_r и υ_t представляют собой радиальную и тангенциальную составляющие скорости звука соответственно.

5. В контексте анизотропной устойчивой структуры показатель адиабаты должен быть больше 4/3.



а б

Рисунок 2.1 – Поведение метрических потенциалов e^{ω} и e^{μ} в зависимости от радиуса r/R_0 КЗ для числовых значений *а,б*

Примечание – Числовые значения *а, б* приведены в таблице 2.1

2.4 Физическая приемлемость моделей в *F(R)* гравитации

В этом подразделе подробно рассмотрены физические характеристики компактной звездной системы, подчеркнув ее значимость с точки зрения достоверности и стабильности. Существующие качественные результаты в моделях $F(R)$ гравитации, описанные в работах в этом подразделе, последовательно отображают реалистичное расположение звездных систем в астрофизических контекстах [60, p. 451–468; 67, p. 124–139; 71-74]. Когнола и другие [61, p. 046009] представили набор реалистично модифицированных экспоненциальных моделей гравитации, подчеркнув их соответствие локальным проверкам, таким как соблюдение закона Ньютона и устойчивость решений сферических тел [75]. Олмо и другие [76] рассмотрели большое влияние на астрофизические свойства звезд, открыв новое окно для сопоставления гравитационных моделей $F(R)$ с помощью настоящих и

будущих наблюдений различных типов звезд. Показано, что для релятивистских звезд, таких как НЗ, неопределенность в УС материи при сверхъядерных плотностях переплетается с новыми параметрами, исходящими от модифицированной гравитации, обеспечивая совершенно новую феноменологию для типичных предсказаний моделей звездной структуры, таких как соотношения массы и радиуса, максимальные массы или момент инерции. Недавно некоторыми учеными была исследована устойчивость и согласованность компактной звездной системы, рассматривая экспоненциальную и обратную модель в МТГ, которая помогает развить всестороннее понимание физической структуры звездной звезды [77-79]. В ряде исследований [80] была рассмотрена связь между скалярно-тензорной гравитацией и модифицированной $F(R)$ гравитацией на основе различных моделей, с анализом их влияние на космическое ускорение и механизм Хамелеона. Также изучена [76, p. 131302] эпоха доминирования материи в рамках моделей темной энергии $F(R)$ гравитации, где особое внимание уделено выводам модели (2.26), демонстрирующей согласованное и стабильное поведение в пределах Солнечной системы.

Основываясь этими недавними моделями $F(R)$ гравитации, в данном подразделе исследована физическая проверка предлагаемых средств для небесных тел с использованием плотности энергии, давления и анизотропных параметров в двух различных моделях $F(R)$ гравитации которые придерживаются осуществимости и стабильности теории гравитации, следующим образом [81]:

$$\text{Модель} - 1:\ F(R) = R + \alpha\left(e^{-\beta R} - 1\right), \tag{2.25}$$

$$\text{Модель} - 2: F(R) = R - (1-\delta)\gamma^2\left(\frac{R}{\gamma^2}\right)^{\delta}, \tag{2.26}$$

где α, β, γ и δ – параметры модели, которые необходимо определить для известных звездных данных (таблицы 2.1 и 2.2).

Также изучена модель $F(R)$ гравитации, примененная к КЗ, с акцентом на обобщенные граничные условия в пределах $F(R)$ гравитации, важнейший аспект, который часто упускается из виду в исследованиях. В рамках данного исследования параметры модели вычисляются численно, включая обобщенное граничное условие (уравнение (2.23)), тем самым оценивая физическую реалистичность данных моделей.

Таблица 2.1 – Численные значения параметров модели A, K, α, β для Модели: $F(R) = R + \alpha\left(e^{-\beta R} - 1\right)$

Звезды	Наблюдаемая массаM ($M_\odot$)	Прогнозируемый радиус R_0 (км)	A (предполагаемый)	K (предполагаемый)	β (прогнозируемый)	α (предполагаемый)
4U 1538-52	0.87	9.527	0.00064505	0.107716	0.09	11.112
SAX J 1808.4-3658	0.90	9.360	0.000707427	0.113971	0.08	12.5012
EXO 1785-248	1.30	10.775	0.00068864	0.14667	0.03	33.334
Cen X-3	1.49	11.224	0.00070821	0.163461	0.02	50
4U 1820-30	1.58	11.422	0.00071732	0.17136	0.009	111.112
PSR J1903+327	1.667	11.604	0.00072635	0.178998	0.008	125
4U 1608-52	1.74	11.751	0.0007339	0.185399	0.006	166.668
PSR J1614-2230	1.97	12.182	0.0007583	0.205599	0.003	333.34
Примечание – Составлено по источникам [82-89]						

Таблица 2.2 – Числовые значения параметров модели m, γ для Модели: $F(R) = R - (1-\delta)\gamma^2 \left(\frac{R}{\gamma^2}\right)^{\delta}$

Звезда	Наблюдаемая масса M ($M_\odot$)	Прогнозируемый радиус R_0 (км)	δ (Прогнозируемый)	γ (предполагаемый)
4U 1538-52	0.87	9.527	0.567	0.126519
SAX J 1808.4-3658	0.90	9.360	0.584	0.143532
EXO 1785-248	1.30	10.775	0.594	0.144017
Cen X-3	1.49	11.224	0.587	0.13747
4U 1820-30	1.58	11.422	0.590	0.139201
PSR J1903+327	1.667	11.604	0.660	0.22749
4U 1608-52	1.74	11.751	0.677	0.266643
PSR J1614-2230	1.97	12.182	0.697	0.327153

2.4.1 Решение для модели: $F(R) = R + \alpha\left(e^{-\beta R} - 1\right)$

Используя модель $F(R) = R + \alpha\left(e^{-\beta R} - 1\right)$ и метрическую функцию (2.24), уравнения для полей (2.7) - (2.9) и уравнения (2.11) можно получить в виде:

$$8\pi\rho=\frac{1}{14(Ar^2+1)^3(Ar^2-K+1)^2}\Big[64A^2r^2\left(Ar^2-3\right)\left(Ar^2-K+1\right)-32A^2r^2\times$$
$$\times\left(Ar^2\left(Ar^2+10\right)-7\right)\left(Ar^2+1\right)\exp[\Psi(r)]+\Big[8A\alpha\beta\Big(\left(Ar^2+1\right)^2\left(5Ar^2(Ar^2+8)\right)-$$
$$-21)\Big]-K\left(3Ar^2+7\right)\left(Ar^2\left(Ar^2+6\right)-3\right)-7\alpha\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2\Big]+ \qquad (2.27)$$
$$+8A\Big[7A^4r^8+A^3(58-7K)r^6+A^2\left(K\left(2K-37\right)+92\right)r^4+3(K-1)(6K+1)\Big]+$$
$$+7\alpha\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2-16A\left(Ar^2\left(Ar^2+10\right)-7\right)\left(Ar^2+1\right)\times$$
$$\times\left(Ar^2-K+1\right)+8A\Big[Ar^2\left(Ar^2+10\right)-7\Big]\left(Ar^2+1\right)\left(Ar^2+K-1\right)\Big],$$

$$8\pi P_r=\frac{7-Ar^2\left(Ar^2+10\right)}{14\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2\left(Ar^2+10\right)-7\right)\left(Ar^3-Kr+r\right)^2}\Big[-8Ar^2\left(-3Ar^2+K-1\right)\times$$
$$\times\Big[4K\left(Ar^2-3\right)+\left(Ar^2+5\right)\left(Ar^2+1\right)^2\Big](\alpha\beta\exp[\Psi(r)-1])-7\alpha\left(Ar^2+1\right)^3\times \qquad (2.28)$$
$$\times\left(Ar^3-Kr+r\right)^2(\exp[\Psi(r)]-1)+Ar^2\left(7A^4r^8+A^3(58-7K)r^6+\right.$$
$$\left.+A^2\left(K\left(2K-37\right)+92\right)r^4+A\left(K\left(4K-77\right)+38\right)r^2+3(K-1)(6K+1)\right)\Big],$$

$$8\pi P_t=\frac{1}{14(Ar^2+1)^3(Ar^2-K+1)^2}\Big[8A\left(Ar^2-K+1\right)\left(3A^3r^6+A^2(19-2K)r^4+\right.$$
$$\left.+3A(7-2K)r^2-12K+5\right)+8A\Big(-7A^4r^8+A^3(7b-58)r^6+A^2\big((37-2K)K-$$
$$-92\big)r^4+A\big((77-4K)K-38\big)r^2-3(K-1)(6K+1)\Big)+\alpha\left(Ar^2-K+1\right)\times \qquad (2.29)$$
$$\times\Big[-8A\alpha\beta\left(3A^3r^6+A^2(19-2K)r^4+3A(7-2K)r^2-12K+5\right)-7\times$$
$$\times\left(Ar^2+1\right)^3\left(-Ar^2+K-1\right)\Big]\exp[\Psi(r)]-7\alpha\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2\Big],$$

$$\Delta=\frac{8A^2Kr^2\left(-K\left(Ar^2+5\right)+2Ar^2\left(Ar^2+8\right)-2\right)}{7\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}[\alpha\beta\exp[\Psi(r)]-1]. \qquad (2.30)$$

где

$$\Psi(r)=\frac{8A\beta\left[7A^4r^8+A^3(58-7K)r^6+A^2\left(K\left(2K-37\right)+92\right)r^4\right]}{7\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}+$$
$$+\frac{8A\beta[A\left(K\left(4K-77\right)+38\right)r^2+3(K-1)(6K+1)]}{7\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}.$$

Следует отметить, что после тщательного изучения уравнения (2.30), при *K=0*, то анизотропия исчезает, что означает, что параметр *N* играет важную роль в настоящем исследовании.

2.4.2 Решение для модели: $F(R)=R-(1-\delta)\gamma^2\left(\frac{R}{\gamma^2}\right)^{\delta}$

Используя модель $F(R)=R-(1-\delta)\gamma^2\left(\frac{R}{\gamma^2}\right)^{\delta}$ вместе с метрической функцией (2.24) в уравнениях поля (2.7)-(2.9) и уравнении (2.11), получены следующие переменные материи

$$
\begin{aligned}
8\pi\rho \;=\; & \frac{-A^2r^4-10Ar^2+7}{28r(Ar^2+1)^2}\Bigg[\frac{64A^2r^3}{\left(Ar^2-K+1\right)^2}\Bigg\{1+(\delta-1)\delta\left(\frac{7}{8}\right)^{1-\delta}\times \\
& \times\left(-\frac{A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta-1}\Bigg\}+\frac{32Ar}{Ar^2-K+1}\times \\
& \times\Bigg[(\delta-1)\delta\left(\frac{7}{8}\right)^{1-\delta}\left(1-\frac{A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta-1}\Bigg]- \\
& -\frac{16Ar\left(Ar^2+K-1\right)}{\left(Ar^2-K+1\right)^2}\Bigg[(\delta-1)\delta\left(\frac{7}{8}\right)^{1-\delta}\left(1-\frac{A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta-1}\Bigg]- \\
& -\frac{128A^2r^3\left(-A^2r^4-10Ar^2+7\right)\left(A^2r^4-2Ar^2-3\right)}{\left(Ar^2+1\right)^2\left(A^2r^4+10Ar^2-7\right)^2\left(-Ar^2+K-1\right)}\Bigg[(\delta-1)\delta\left(\frac{7}{8}\right)^{1-\delta}\times \\
& \times\left(1-\frac{A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta-1}\Bigg]-\frac{14Ar\left(Ar62+1\right)^2}{7-A^2r^4-10Ar^2}\times \\
& \times\Bigg\{\frac{8A\rho_1(r)}{7\left(Ar^2+1\right)^3\left(K-Ar^2-1\right)^2}+\left(\frac{8}{7}\right)^{\delta}(\delta-1)\gamma^2\left[\frac{A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^3\left(K-Ar^2-1\right)^2}\right]^{\delta}\Bigg\}\Bigg],
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\rho_1(r) = {} & 2K^2\left(A^2r^4+2Ar^2+9\right)+\left(Ar^2+1\right)^2\left(7A^2r^4+44Ar^2-3\right)- \\
& -K\left(7A^3r^6+37A^2r^4+77Ar^2+15\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8\pi P_r \quad &= \frac{-A^2r^4-10Ar^2+7}{98\left(Ar^2+1\right)^4\left(-A^2r^4+10Ar^2-7\right)\left(Ar^3-Kr+r\right)^2}\left[56Ar^2\left(Ar^2+1\right)\times\right.\\
&\times\left\{2K^2\left(A^2r^4+2Ar^2+9\right)+\left(Ar^2+1\right)^2\left(7A^2r^4+44Ar^2-3\right)-K\left(7A^3r^6+\right.\right.\\
&+37A^2r^4++77Ar^2+15\left.\right)\}-56Ar^2\left(Ar^2+1\right)\left(\left(3A^2r^4+16Ar^2+5\right)\left(Ar^2+1\right)^2-\right.\\
&-4K^2\left(Ar^2-3\right)-K\left(A^3r^6-5A^2r^4+43Ar^2+17\right)\left)\left[1+\left(\frac{7}{8}\right)^{1-\delta}(\delta-1)\delta\times\right.\right.\\
&\left.\left.\times\left(\frac{A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta-1}\right]-7^{2-\delta}8^{\delta}(\delta-1)r^2\left(Ar^2+1\right)^4\times\right.\\
&\times\left(Ar^2-K+1\right)^2\gamma^2\left[\frac{-A}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}\left(2K^2\left(A^2r^4+2Ar^2+9\right)+\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(Ar^2+1\right)^2\left(7A^2r^4+44Ar^2-3\right)-K\left(7A^3r^6+37A^2r^4+77Ar^2+15\right)\right)\right]^{\delta}\left.\right]
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

$$
\begin{aligned}
8\pi P_t \quad &= \frac{-A^2r^4-10Ar^2+7}{14\left(Ar^3+r\right)^2}\left[-\left\{\frac{1}{\left(Ar^2+1\right)\left(A^2r^4+10Ar^2-7\right)\left(Ar^2-K+1\right)}\times\right.\right.\\
&\times\left[8Ar^2\left(3A^3r^6-2K\left(A^2r^4+3Ar^2+6\right)+19A^2r^4+21Ar^2+5\right)\left(1+\left(\frac{7}{8}\right)^{1-\delta}\times\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\times(\delta-1)\delta\left(\frac{-A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^2\left(Ar^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta-1}\right)\right]\left.\right\}+\frac{7\left(Ar^3+r\right)^2}{-A^2r^4-10Ar^2+7}\times\\
&\times\left[\frac{-8A\rho_1(r)}{7\left(Ar^2+1\right)^3\left(Ar^2-K+1\right)^2}+\left(\frac{8}{7}\right)^{\delta}(\delta-1)\gamma^2\left(\frac{-A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^2\left(Ar^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta}\right],
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \quad &= \frac{1}{7\left(Ar^2+1\right)^3\left(A^2r^4+10Ar^2-7\right)\left(Ar^2-K+1\right)^2}\left[8A^2Kr^2\times\right.\\
&\times\left(-A^2r^4-10Ar^2+7\right)\left(2\left(A^2r^4+8Ar^2-1\right)-K\left(Ar^2+5\right)\right)\times\\
&\times\left.\left\{1+\left(\frac{7}{8}\right)^{1-\delta}(\delta-1)\delta\left(\frac{-A\rho_1(r)}{\gamma^2\left(Ar^2+1\right)^2\left(Ar^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta-1}\right\}\right].
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

2.4.3 Оценка параметров модели и сравнение с соответствующими астрофизическими данными

В этом подразделе оцениваются значения параметров модели a,b и α с помощью подходящих граничных условий (2.14)-(2.15) и (2.23). Принимая во внимание условия (2.14)-(2.15) в уравнении (2.24), значения A и K определяются как:

$$A = \frac{-7MR_0^2 - 2\sqrt{9R_0^6 - 14MR_0^5} + 6R_0^3}{7MR_0^4 - 4R_0^5}, \tag{2.35}$$

$$K = \frac{-2\sqrt{R_0^5(9R_0 - 14M)} - 7MR_0^2 + 6R_0^3}{R_0^2(7M - 4R_0)} - \frac{\sqrt[4]{R_0 - 2M}}{\sqrt[4]{R_0}} + 1. \tag{2.36}$$

Далее, используя уравнения (2.25) и (2.28), граничное условие (2.23) дает значение α как:

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{1}{G(A,K,\beta)}\Bigg[&\frac{16AK^2\left(A^2R_0^4 + 2AR_0^2 + 9\right)}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2 - K + 1\right)^2} + \frac{8A\left(7A^2R_0^4 + 44AR_0^2 - 3\right)}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2 - K + 1\right)^2} \\ &- \frac{8AK\left(7A^3R_0^6 + 37A^2R_0^4 + 77AR_0^2 + 15\right)}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2 - K + 1\right)^2} + \frac{8A}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2 - K + 1\right)^2} \times \\ &\times\Big[-K^2\left(A^2R_0^4 + 15\right) + 4K\left(A^3R_0^6 + 4A^2R_0^4 + 15AR_0^2 + 4\right) - \left(AR_0^2+1\right)^2 \times \\ &\times\left(5A^2R_0^4 + 30AR_0^2 + 1\right)\Big]\Bigg],\end{aligned} \tag{2.37}$$

где

$$\begin{aligned}G(A,K,\beta) = -1 + \exp[\Psi(R_0)] - \frac{8A\beta}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2 - K + 1\right)^2}\Big[&\left(AR_0^2+1\right)^2 \times \\ &\times\left(5A^2R_0^4 + 30AR_0^2 + 1\right) - 4K\left(A^3R_0^6 + 4A^2R_0^4 + 15AR_0^2 + 4\right) + \\ &+ K^2\left(A^2R_0^4 + 15\right)\Big]\exp[\Psi(R_0)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(R_0) = &\frac{8A\beta\left(2K^2\left(A^2R_0^4 + 2AR_0^2 + 9\right) + \left(AR_0^2+1\right)^2\left(7A^2R_0^4 + 44AR_0^2 - 3\right)\right)}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2 - K + 1\right)^2} - \\ &- \frac{8A\beta K\left(7A^3R_0^6 + 37A^2R_0^4 + 77AR_0^2 + 15\right)}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2 - K + 1\right)^2}.\end{aligned}$$

Кроме того, используя уравнения (2.26) и (2.28), граничное условие (2.23) дает значение γ, заданное в уравнении:

$$\frac{1}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2-K+1\right)^2}\Big[8A\Big\{K^2\left(A^2R_0^4+15\right)+\left(AR_0^2+1\right)^2\times$$
$$\times\left(5A^2R_0^4+30AR_0^2+1\right)-4K\left(A^3R_0^6+4A^2R_0^4+15AR_0^2+4\right)\Big\}\times$$
$$\times\left\{1+\left(\frac{7}{8}\right)^{1-\delta}(1-\delta)\delta\left(-\frac{A\rho_1(R)}{\gamma^2\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta-1}\right\}\Big]+ \qquad (2.38)$$
$$+\gamma^2\left(\frac{8}{7}\right)^{\delta}(\delta-1)\left(-\frac{A\rho_1(R)}{\gamma^2\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2-K+1\right)^2}\right)^{\delta}=\frac{8A\rho_1(R)}{7\left(AR_0^2+1\right)^3\left(AR_0^2-K+1\right)^2},$$

где

$$\rho_1(R)=2K^2\left(A^2R_0^4+2AR_0^2+9\right)+\left(AR_0^2+1\right)^2\left(7A^2R_0^4+44AR_0^2-3\right)-K\left(7A^3R_0^6+37A^2R_0^4+77AR_0^2+15\right).$$

Проанализированы астрофизические данные, касающиеся КЗ, с особым вниманием к объектам *4U1538-52, SAX J 1808.4-3658, EXO 1785-248, Cen X-3, 4U1820-30, PSR J1903+327, 4U1608-52* и *PSR J1614-2230*, включая их массы и радиусы. Исследование оценивает надежность звездной модели с помощью сравнительного подхода. Численные значения параметров модели $A, K, \alpha, \beta, \gamma$ и m для этих КЗ определены с использованием вышеупомянутых астрофизических точек данных, как подробно описано в таблицах 2.1 и 2.2. Затем эти параметры модели использовались вместе с астрофизическими данными для вычисления таких параметров, как ρ, P_r, P_t, Δ и K которые впоследствии графически представлены для иллюстрации их тенденций.

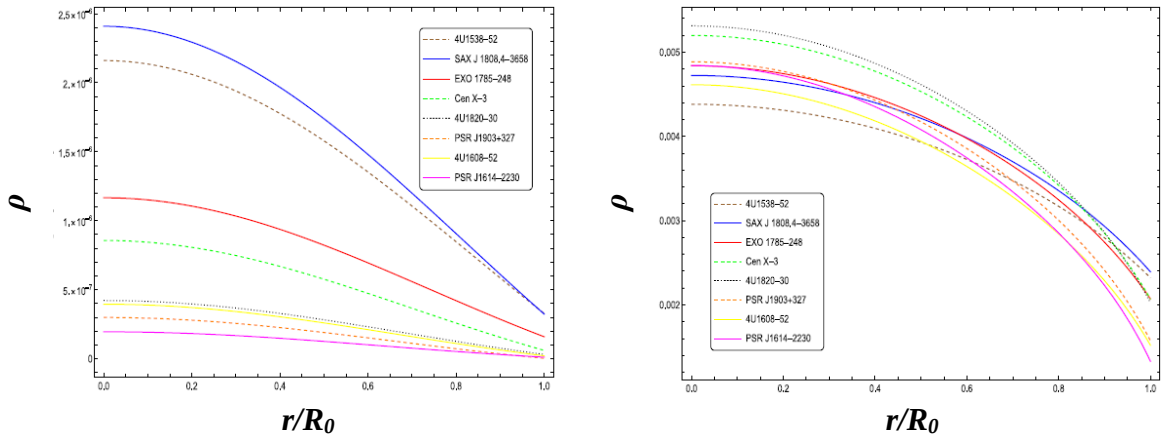
2.5 Физические характеристики компактных звезд в рамках *F(R)* гравитации

Сосредоточившись на энергетических условиях, проведено исследование для проверки предлагаемых решений для звездной модели, анализе устойчивости, параметрах УС, компактности, анализе красного смещения и показателя адиабаты в обеих моделях, которые демонстрируют осуществимость и соответствие теории гравитации. Кроме того, приведены подробные обсуждения, сопровождаемые графическими представлениями.

2.5.1 Плотность, давление и анизотропия в рассматриваемых моделях

Иллюстрируется графические представления переменных ρ, P_r и P_t в контексте моделей теории $F(R)$ гравитации. Рисунки 2.2, 2.3 и 2.4 наглядно демонстрируют физическое поведение этих переменных. Графики ясно показывают, что ρ, P_r и P_t демонстрируют положительность и ограниченность модели. Примечательно, что графический анализ показывает, что как плотность

энергии, так и давление достигают максимальных значений в ядре КЗ, постепенно уменьшаясь к поверхности (показано в таблицах 2.3 и 2.4).

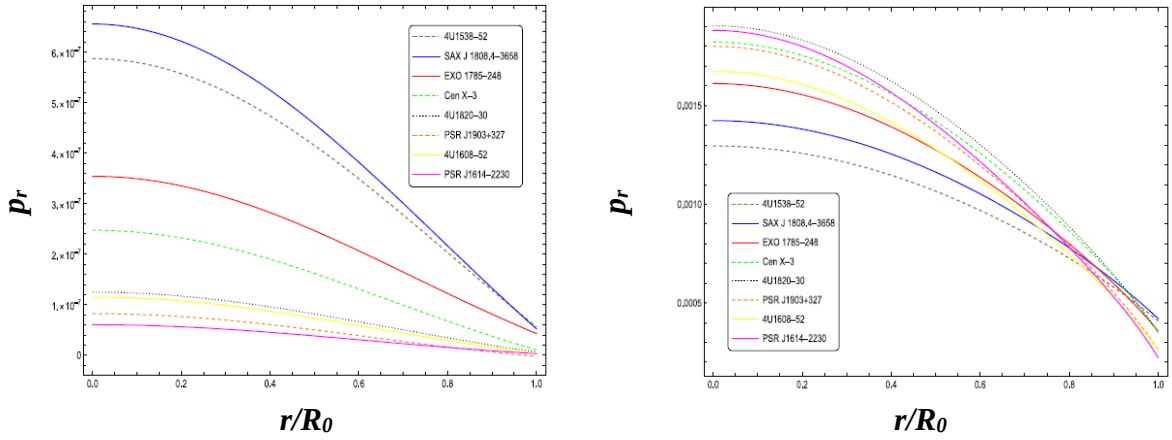


а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.2 – Эволюция плотности ρ с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ

Примечание – Числовые значения $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2

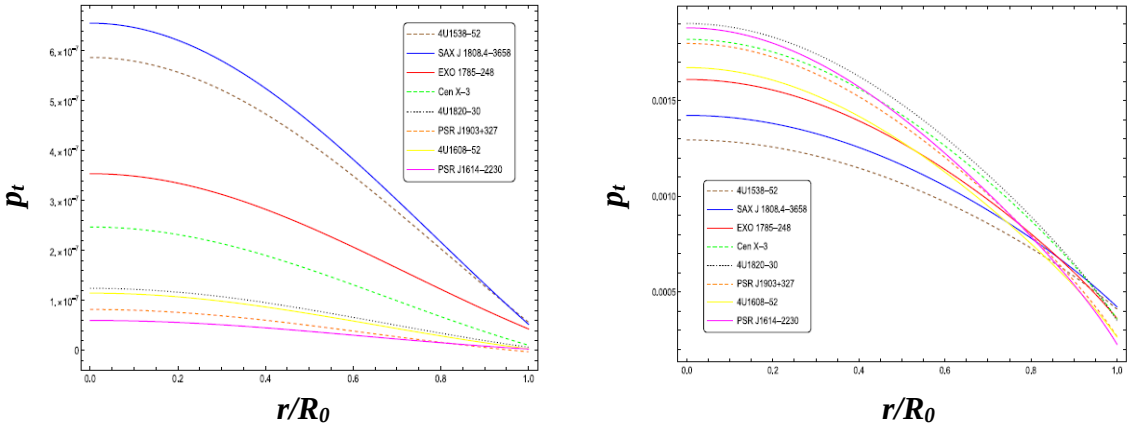


а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.3 – Эволюция радиального давления P_r с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ

Примечание – Числовые значения $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2



а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.4 – Эволюция тангенциального давления P_t с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ

Примечание – Числовые значения $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2

Таблица 2.3 – Физические параметры: поверхностная плотность ρ_S, поверхностное радиальное давление $P_{r|s}$, поверхностное тангенциальное давление $P_{t|s}$ и поверхностная анизотропия Δ_S КЗ для модели-1: $F(R) = R + \alpha\left(e^{-\beta R} - 1\right)$

Звезда	ρ_S (г/см³) (10^{10})	$P_{r\|s}$ (дин/см²) (10^{30})	$P_{t\|s}$ (дин/см²) (10^{30})	Δ_S (дин/см²) (10^{32})
4U 1538-52	1.176179	2.7204	2.73899	1.59414
SAX J 1808.4-3658	1.74043	2.52646	1.23749	1.73279
EXO 1785-248	0.856903	2.07885	2.09357	1.47527
Cen X-3	0.326697	0.512458	0.518736	0.62771
4U 1820-30	0.168875	0.322684	0.326316	0.363166
PSR J1903+327	0.114594	0.16434	0.166876	0.25367
4U 1608-52	0.1185934	0.118803	0.118694	0.0109234
PSR J1614-2230	0.0628327	0.146401	0.148294	0.18926

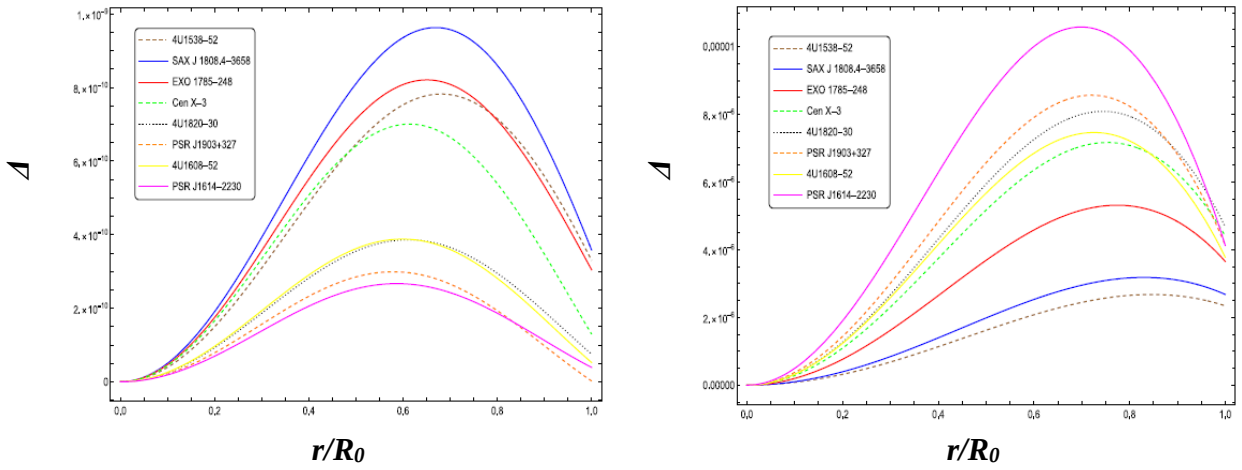
Таблица 2.4 – Физические параметры: поверхностная плотность ρ_S, поверхностное радиальное давление $P_{r|s}$, поверхностное тангенциальное давление $P_{t|s}$ и поверхностная анизотропия Δ_S КЗ для модели-2: $F(R) = R - (1-\delta)\gamma^2\left(\frac{R}{\gamma^2}\right)^{\delta}$

Звезда	ρ_S (г/см³) (10^{14})	$P_{r\|s}$ (дин/см²) (10^{34})	$P_{t\|s}$ (дин/см²) (10^{34})	Δ_S (дин/см²) (10^{32})
1	2	3	4	5
4U 1538-52	1.24689	1.97699	1.99831	1.13251

Продолжение таблицы 2.4

1	2	3	4	5
SAX J 1808.4-3658	1.28449	2.03161	2.04455	1.29475
EXO 1785-248	1.11214	1.73428	1.75195	1.76626
Cen X-3	1.1108	1.71819	1.73949	2.12986
4U 1820-30	1.08842	1.67679	1.6994	2.26124
PSR J1903+327	0.81638	1.26647	1.28474	1.82746
4U 1608-52	0.845527	1.27492	1.29491	1.99842
PSR J1614-2230	0.713948	1.07909	1.09904	1.99515

Эти результаты описывают значительную компактность, характерную для КЗ. В области динамических моделей звездных объектов значительное внимание уделяется роли анизотропии звезд. В частности, моделирование сверхплотных звезд сильно зависит от наличия анизотропного напряжения, вытекающего из внутренней анизотропии материала. Выражение $\frac{2\Delta}{r}$ обозначает силу, возникающую из анизотропии жидкости, которая существенно влияет на динамику звезд. Эта сила проявляется либо как направленная наружу (отталкивающая), когда $\Delta > 0$ либо как направленная внутрь (притягивающая), когда $\Delta < 0$. Важно отметить, что интригующая характеристика этой анизотропной силы заключается в ее влиянии на динамику звездных объектов, где отталкивающая сила ($\Delta > 0$) поддерживает образование более КЗ по сравнению с моделями изотропной жидкости [90, 91]. Графическое представление параметра анизотропии Δ показано на рисунке 2.5.



а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.5 – Изменение анизотропии Δ с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ

Примечание – Числовые значения $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2

2.5.2 Энергетические условия анизотропных компактных звезд

В этом подразделе рассматриваются физические характеристики данных звездных моделей, исследуются различные энергетические условия. Звездная структура считается физически жизнеспособной, если она удовлетворяет энергетическим условиям во всех своих внутренних областях. В области стабильных КЗ энергетические условия имеют решающее значение. Структура ОТО позволяет сформулировать энергетические условия как локальные неравенства, которые управляют взаимодействием между плотностью энергии ρ и давлениями P_r, P_t с учетом определенных ограничений. Хотя существует несколько подходов для определения энергетических условий, в первую очередь акцентируется внимание на NEC, WEC, SEC, DEC, каждое из которых определяется следующим образом:

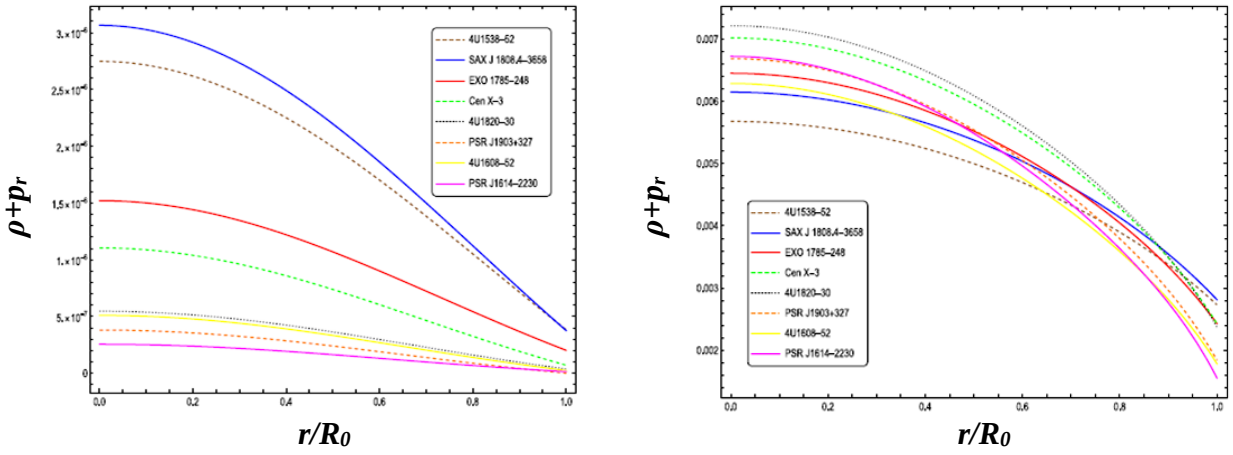
$$\text{NEC}: \rho + P_r \geq 0,\ \rho + P_t \geq 0, \tag{2.39}$$

$$\text{WEC}: \rho \geq 0,\ \rho + P_r \geq 0,\ \rho + P_t \geq 0, \tag{2.40}$$

$$\text{SEC}: \rho + P_r + 2P_t \geq 0, \tag{2.41}$$

$$\text{DEC}: \rho \geq 0,\ \rho \pm P_r \geq 0,\ \rho \pm P_t \geq 0. \tag{2.42}$$

Энергетические условия, продемонстрированные данными звездными моделями на рисунках 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, демонстрируют удовлетворительные характеристики.

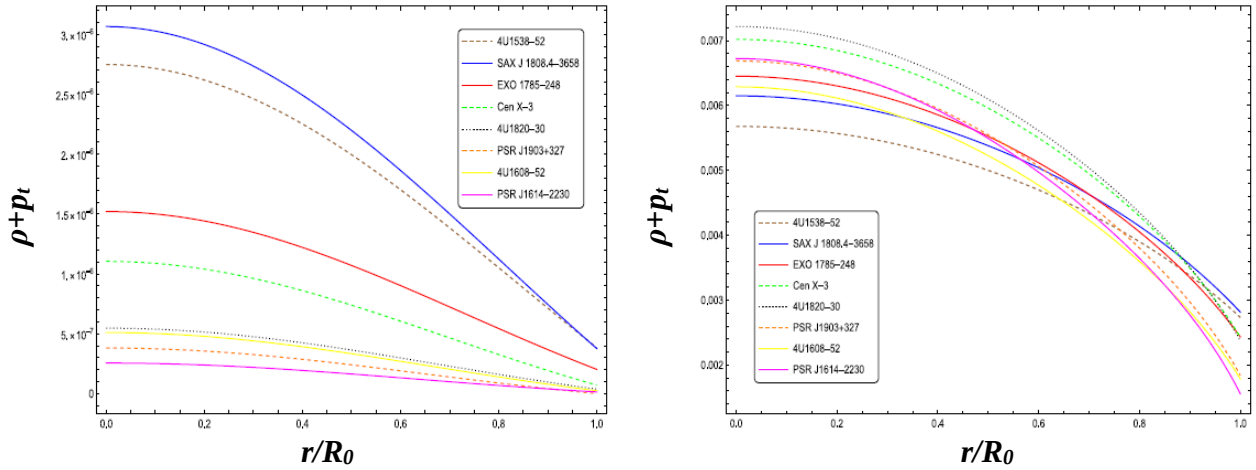


а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.6 – Изменение энергетических условий с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ

Примечание – Числовые значения $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2

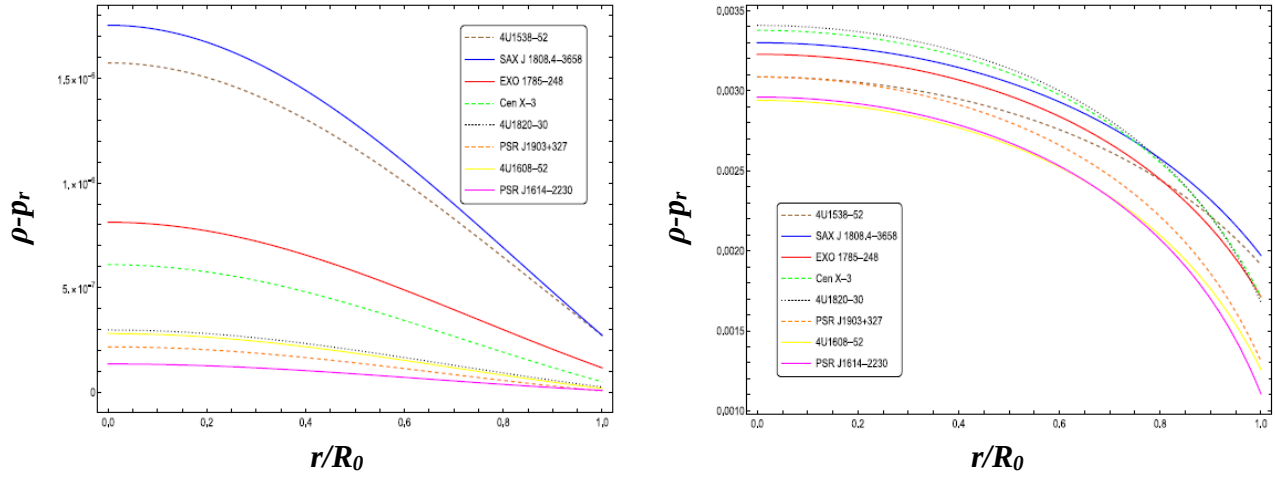


а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.7 – Изменение энергетических условий с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ

Примечание – Числовые значения $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2

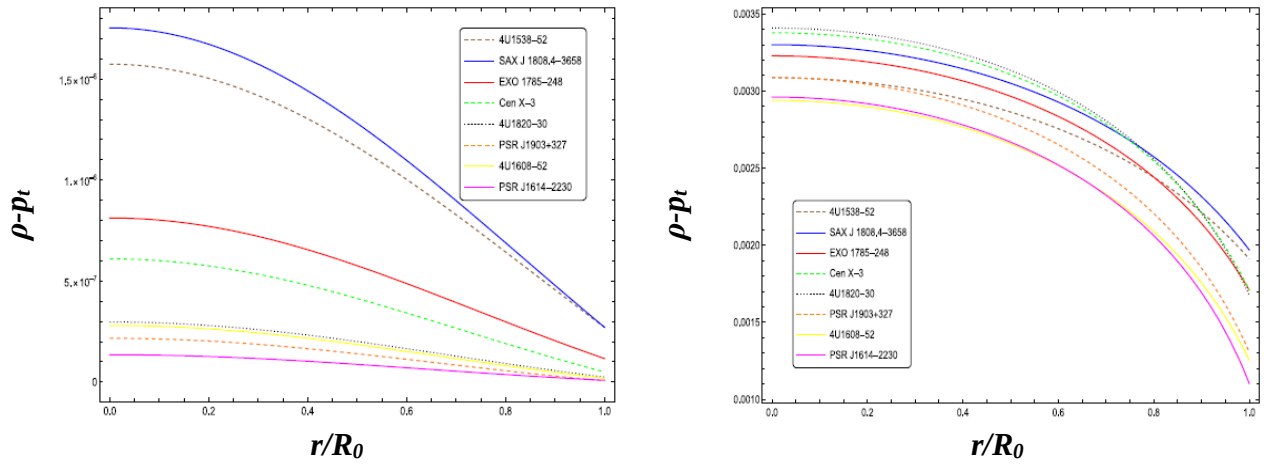


а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.8 – Изменение энергетических условий с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ

Примечание – Числовые значения $a, b, \alpha, \beta, \delta$ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2

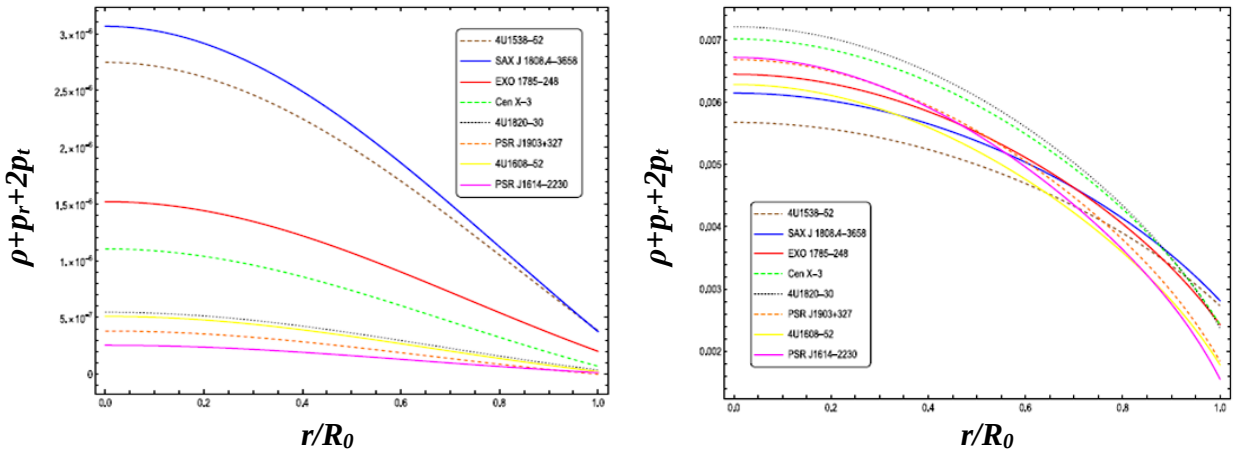


а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.9– Изменение энергетических условий с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений a,b,α,β,δ и γ

Примечание – Числовые значения a,b,α,β,δ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2



а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.10– Изменение энергетических условий с радиусом r/R_0 КЗ для числовых значений a,b,α,β,δ и γ

Примечание – Числовые значения a,b,α,β,δ и γ приведены в таблицах 2.1 и 2.2

2.5.3 Гидростатическое равновесие анизотропных компактных звезд

В этом подразделе исследована устойчивость равновесия в звездной модели под влиянием гравитационной силы, гидростатической силы и анизотропной силы. Уравнение ТОВ, первоначально предложенное Толменом, Оппенгеймером и Волкоффом в их основополагающих работах [18, p. 364-372;

19, p. 374-380], характеризует внутреннюю структуру сферически симметричных анизотропных компактных звездных объектов.

Согласно уравнению ТОВ, состояние равновесия с участием этих сил можно сформулировать следующим образом:

$$8\pi M_G \frac{\rho + P_r}{r} e^{\frac{\mu-\omega}{2}} + 8\pi \frac{dP_r}{dr} - \frac{2}{r}\Delta = 0, \tag{2.43}$$

где M_G – эффективная гравитационная масса, которая выводится из формулы массы Толмена-Уиттекера, представленной как:

$$M_G = \frac{1}{2}\omega' e^{\frac{\omega-\mu}{2}}. \tag{2.44}$$

Используя выражение M_G в уравнении (2.43), получаем:

$$8\pi \frac{\omega'}{r}(\rho + P_r) + 8\pi \frac{dP_r}{dr} - \frac{2}{r}\Delta = 0. \tag{2.45}$$

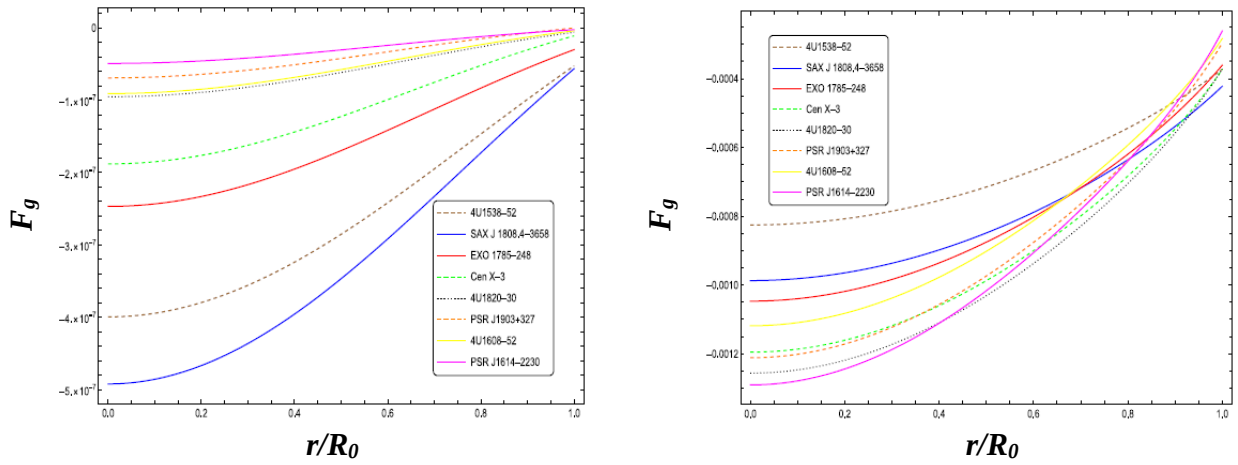
Уравнение ТОВ удовлетворяет условию равновесия $F_g + F_h + F_a = 0$, что указывает на то, что общие силы внутри звездной системы должны быть уравновешены до нуля, где:

$$F_g = -8\pi \frac{\omega'}{r}(\rho + P_r), \tag{2.46}$$

$$F_h = -8\pi \frac{dP_r}{dr}, \tag{2.47}$$

$$F_a = \frac{2}{r}\Delta = \frac{16\pi}{r}(P_t - P_r), \tag{2.48}$$

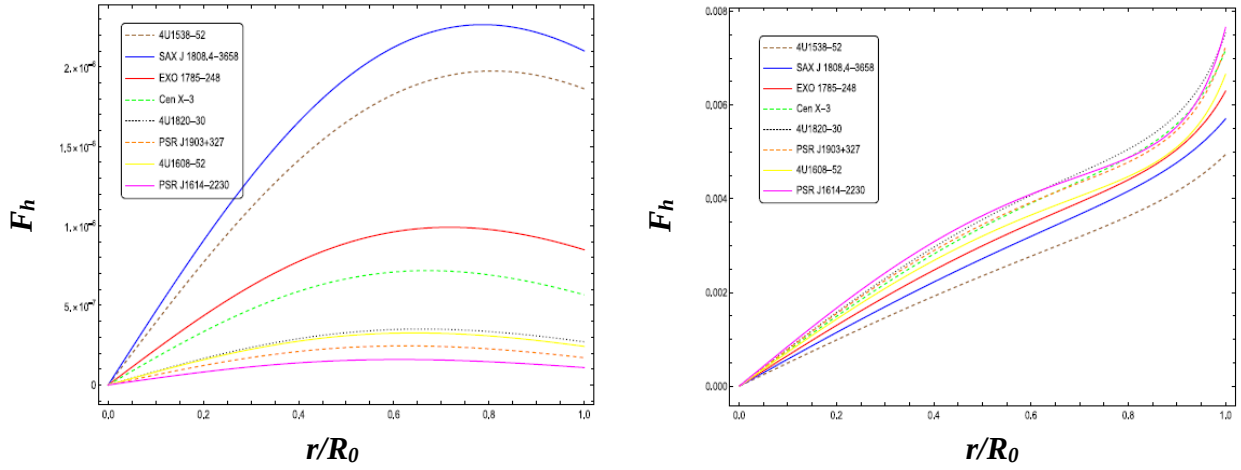
где F_g, F_h, F_a – гравитационная, гидростатическая и анизотропная сила соответственно. Рисунки 2.11, 2.12 и 2.13 показывают, что все эти силы удовлетворяют основным условиям равновесной устойчивости звездной системы.



а б

а – Model-1; б – Model-2

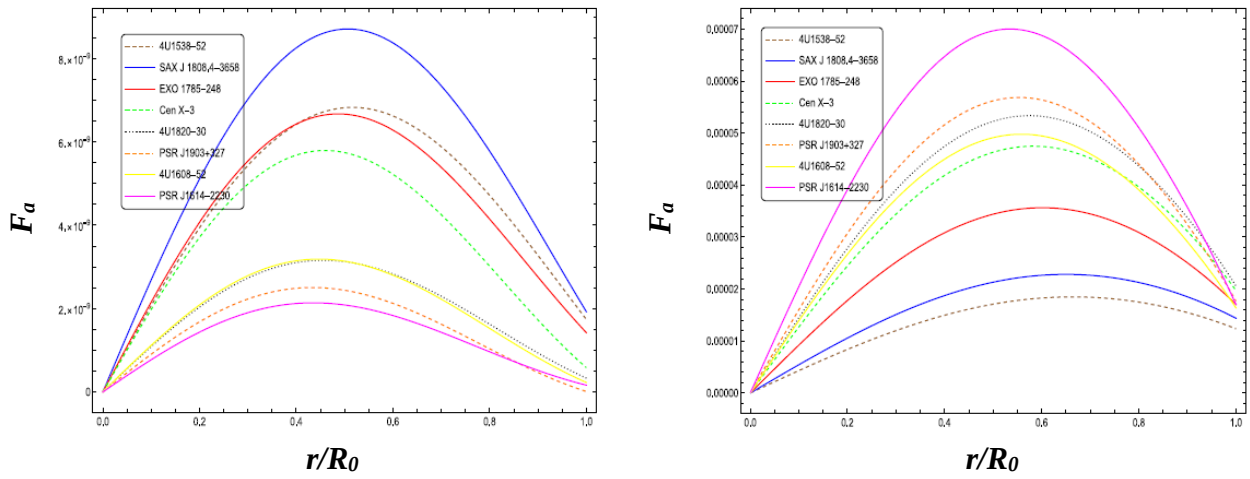
Рисунок 2.11 – Анализ устойчивости-I: природа гравитационной силы (F_g) с радиусом r/R_0 для обеих моделей



а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.12 – Анализ устойчивости-I: природа гидростатической силы (F_h) с радиусом r/R_0 для обеих моделей



а б

а – Model-1; б – Model-2

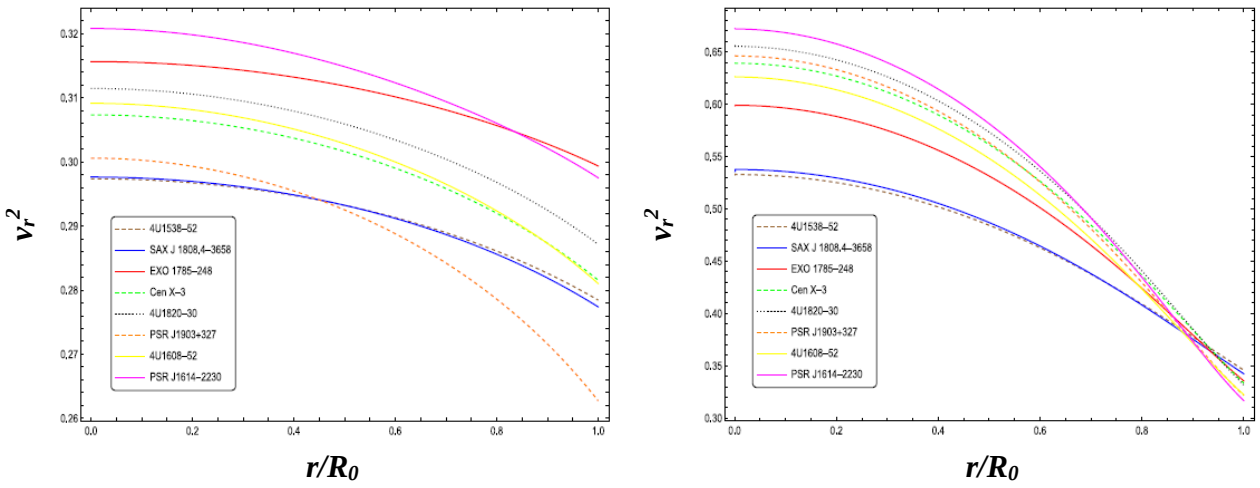
Рисунок 2.13 – Анализ устойчивости-I: природа анизотропной силы (F_a) с радиусом r/R_0 для обеих моделей

2.5.4 Метод Эрреры

Альтернативный подход к исследованию потенциально устойчивой анизотропной структуры компактного звездного объекта включает анализ опрокидывания или разрушения модели. Растрескивание служит практическим методом оценки надежности таких структур. Основная идея заключается в том, что в процессе разрушения жидкие элементы с обеих сторон подвергаются относительному ускорению. Эррера [92] использовал метод растрескивания в исследовании для определения устойчивости КЗ. Эта методология предполагает, что для того, чтобы звездная модель считалась физически правдоподобной, скорость звука внутри нее должна удовлетворять ограничениям причинности, то есть скорость распространения звука внутри звезды должна быть ниже скорости света c. Скорости звука в радиальном и тангенциальном направлениях определяются следующим образом:

$$\upsilon_r^2 = \left|\frac{dP_r}{d\rho}\right|, \ \upsilon_t^2 = \left|\frac{dP_t}{d\rho}\right|, \tag{2.49}$$

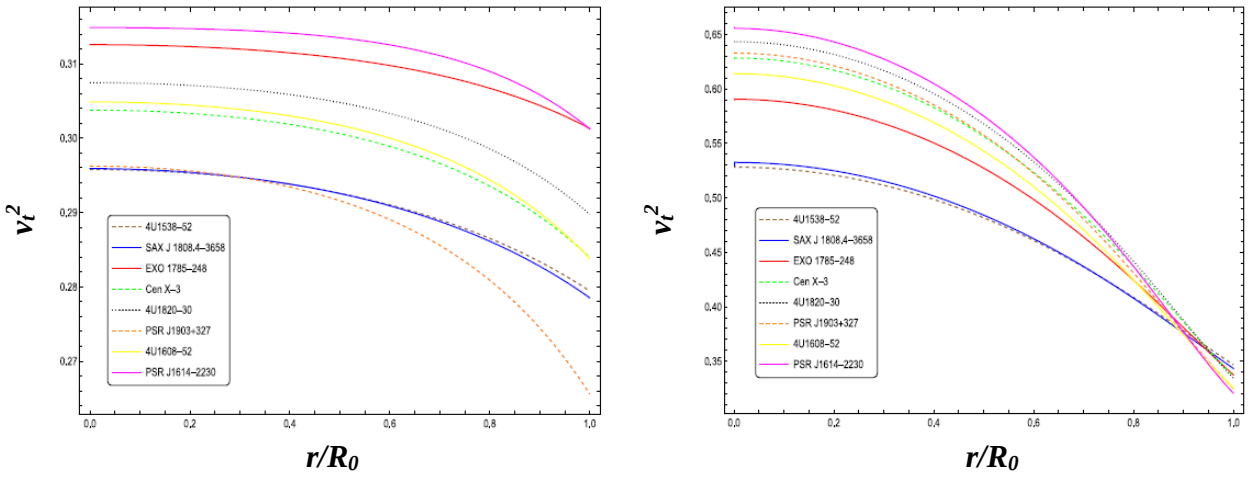
соответственно. Для оценки надежности данной предлагаемой модели рассмотрены условия $0<\upsilon_r^2<1$ и $0<\upsilon_t^2<1$ внутри звездных тел, при этом скорость света c взята равной 1. Рисунки 2.14 и 2.15 наглядно подтверждают потенциальную устойчивость и соответствие условиям причинности рассматриваемых моделей $F(R)$ гравитации.



а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.14 – Анализ устойчивости-II: поведение радиальной скорости звука υ_r^2 с радиусом r/R_0 для обеих моделей



а б

а – Model-1; б – Model-2

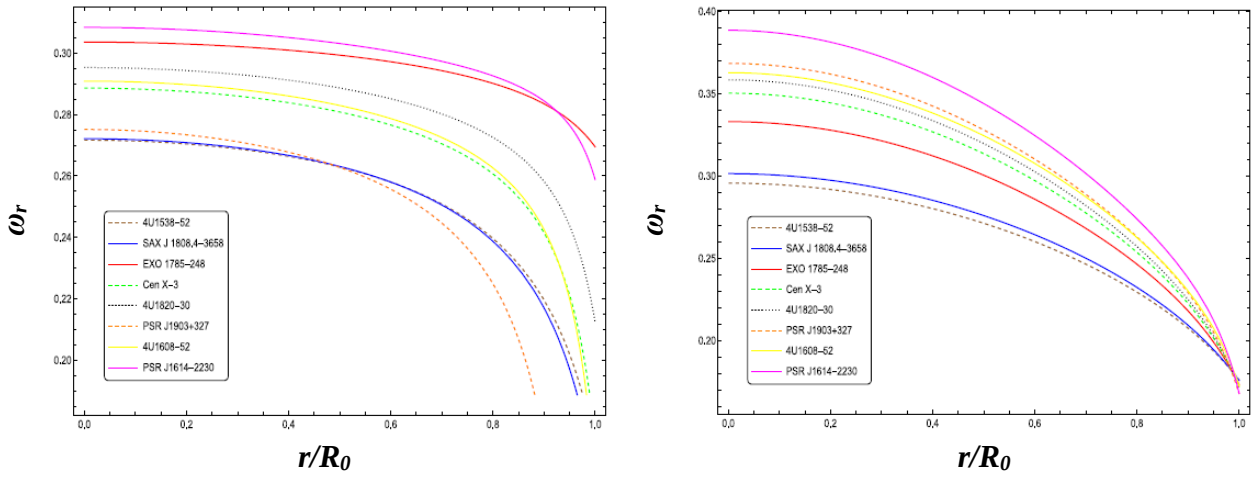
Рисунок 2.15 – Анализ устойчивости-II: поведение тангенциальной скорости звука υ_t^2 с радиусом r/R_0 для обеих моделей

2.5.5 Параметры уравнения состояния

Уравнение состояния характеризует связь между плотностью энергии и давлением в распределении материи, представленное в виде

$$\omega_r = \frac{P_r}{\rho}, \omega_t = \frac{P_t}{\rho}. \qquad (2.50)$$

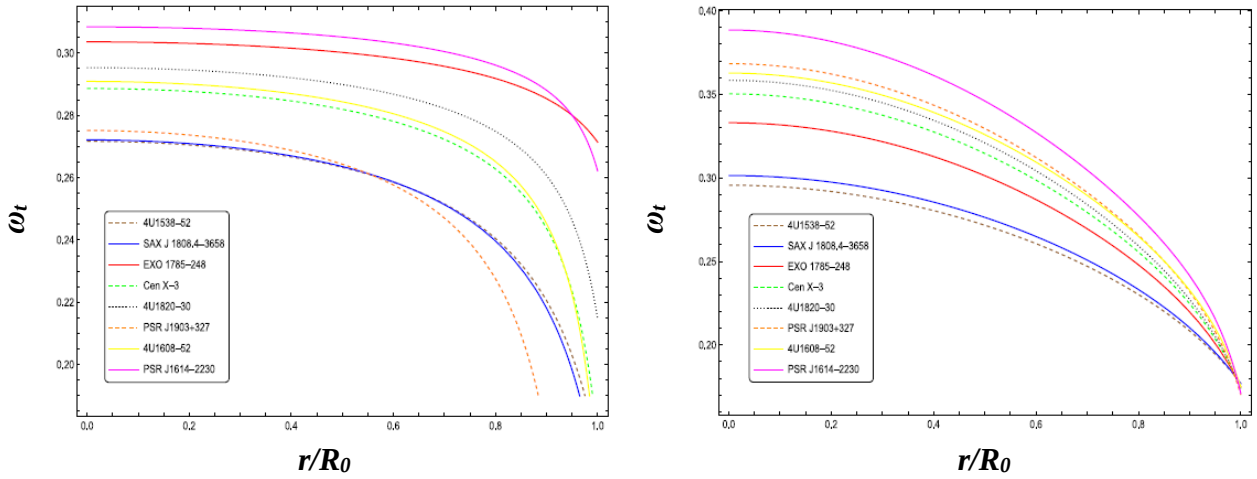
Для описания распределения барионной жидкости параметр УС должен быть меньше 1, что обозначается как $0<\omega_r<1$ и $0<\omega_t<1$. На рисунках 2.16 и 2.17 построены радиальные и тангенциальные вариации параметров УС ω_r и ω_t и очевидно, что внутри звезды они последовательно попадают в диапазон от 0 до 1. Эти наблюдения показывают, что вариации параметра УС физически приемлемы с предложенными звездными моделями.



а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.16 – Параметры уравнения состояния: поведение ω_r в зависимости от радиуса r/R_0



а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.17 – Параметры уравнения состояния: поведение ω_t в зависимости от радиуса r/R_0

2.5.6 Функция массы и фактор компактности

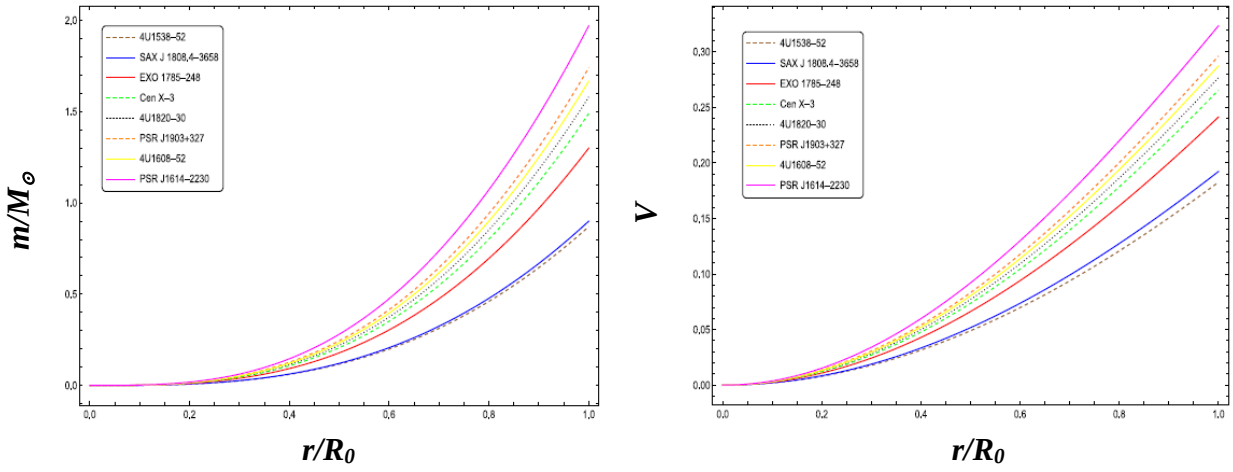
Функция массы $m(r)$ для данной звездной модели получается из уравнения (2.12), которое:

$$m(r)=\frac{1}{2}r\left(1-\frac{-A^2r^4-10Ar^2+7}{7A^2r^4+14Ar^2+7}\right). \tag{2.51}$$

При оценке данной модели важно изучить корреляцию массы и радиуса и установить верхний предел массы. В математических выражениях устойчивость КЗ зависит от отношения массы к радиусу, которое называется «фактором компактности» $V(r)=2m(r)/r$, удовлетворяющим критерию быть меньше 0,889 [93]. Используя уравнение (2.51), фактор компактности можно представить как:

$$V(r)=\frac{8Ar^2\left(Ar^2+3\right)}{7\left(Ar^2+1\right)^2}. \tag{2.52}$$

На рисунке 2.18 показаны графические иллюстрации функции массы и компактности, демонстрирующие графики, которые показывают последовательную картину увеличения от самой внутренней области к внешней границе. Рассчитано численное значение компактности для КЗ и эти результаты подробно изложены в прилагаемой таблице 2.5.



а б

Рисунок 2.18 – *(а)* Поведение массы $m/M_\odot$ *(б)* компактность V с радиусом r/R_0 КЗ для обеих моделей

2.5.7 Анализ красного смещения

Чтобы обеспечить устойчивость в сферически симметричной анизотропной жидкой сфере, необходимо, чтобы гравитационное красное

смещение $z(r)$ постепенно уменьшалось по направлению к внутренней части звезды, как обсуждалось в работе [90, p. 6479-1-6479-17]. Выражение для гравитационного красного смещения внутри КО, описываемое линейным элементом (2.6), выглядит следующим образом:

$$z(r) = e^{\frac{-\omega(r)}{2}} - 1 = \frac{1}{\left(Ar^2 - K + 1\right)^2} - 1 \quad . \tag{2.53}$$

Таблица 2.5 – Значения поверхностного гравитационного красного смещения z_s и параметра компактности υ_s для КЗ

Звезда	z_S	υ_S
4U 1538-52	0.106097	0.182639
SAX J 1808.4-3658	0.112698	0.193208
EXO 1785-248	0.148061	0.241299
Cen X-3	0.166823	0.265502
4U 1820-30	0.175787	0.276659
PSR J1903+327	0.184544	0.287314
4U 1608-52	0.191951	0.296145
PSR J1614-2230	0.215747	0.323428

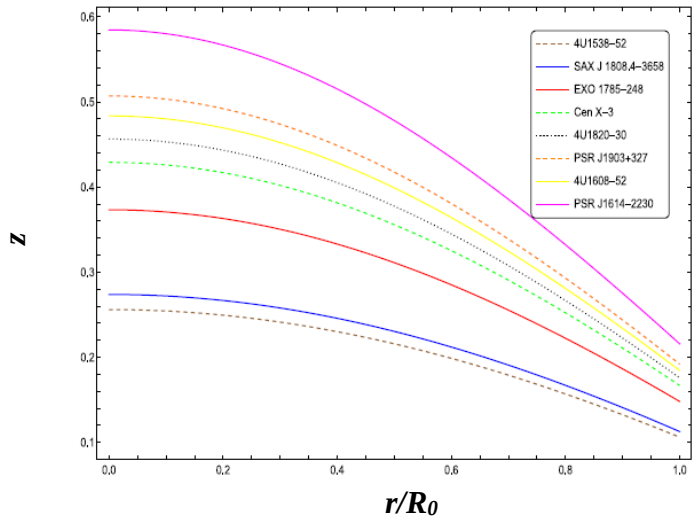


Рисунок 2.19 – Характер красного смещения z с радиусом r / R_0 КЗ для обеих моделей

На рисунке 2.19 изображен профиль изменения гравитационного красного смещения, демонстрирующий убывающий характер от центральной области к внешней граничной поверхности.

Поверхностное красное смещение означает последующую корреляцию:

$$z_s = e^{\frac{-\omega(R_0)}{2}} - 1 = \left(1 - \frac{2M}{R_0}\right)^{\frac{-1}{2}} - 1. \tag{2.54}$$

Кроме того, эффективно рассчитано значения поверхностного красного смещения для КЗ, и эти результаты подробно изложены в прилагаемой таблице 2.5.

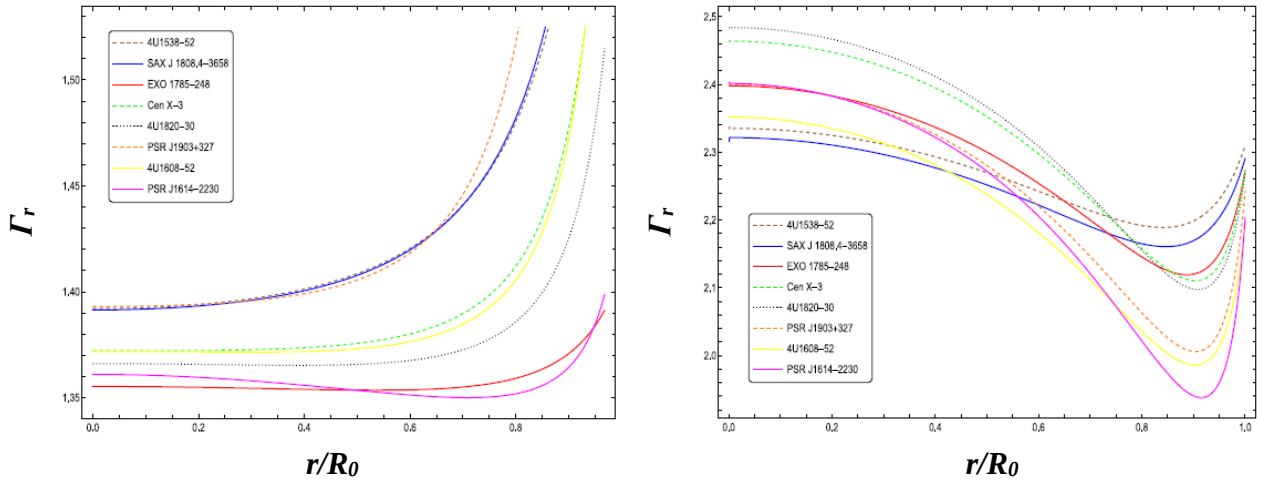
2.5.8 Показатель адиабаты гравитационных моделей

Далее будет проведен углубленный анализ важнейшего фактора стабильности структурной целостности – показателя адиабаты Γ. Данный параметр описывает характеристики УС для заданной плотности энергии, оказывая значительное влияние на оценку стабильности КЗ, как релятивистских, так и нерелятивистских звезд. Чандрасекар [94] изначально ввел концепцию динамической стабильности, касающуюся бесконечно малых радиальных адиабатических возмущений в звездных системах. Кроме того, Хайнцманн и Хиллебрандт [95] постулировали, что анизотропная сфера достигает равновесия, при $\Gamma > 1.33$. Эта концепция была тщательно исследована различными авторами в отношении как изотропных, так и анизотропных звездных сфер [96]. Чтобы обеспечить стабильность анизотропных моделей КЗ, показатель адиабаты должен превышать 1.33.

Выражения значения показателя адиабаты определяются как соответствующие радиальному и тангенциальному направлениям следующим образом:

$$\Gamma_r = \frac{\rho + P_r}{P_r}\frac{dP_r}{d\rho}, \quad \Gamma_t = \frac{\rho + P_t}{P_t}\frac{dP_t}{d\rho}. \tag{2.55}$$

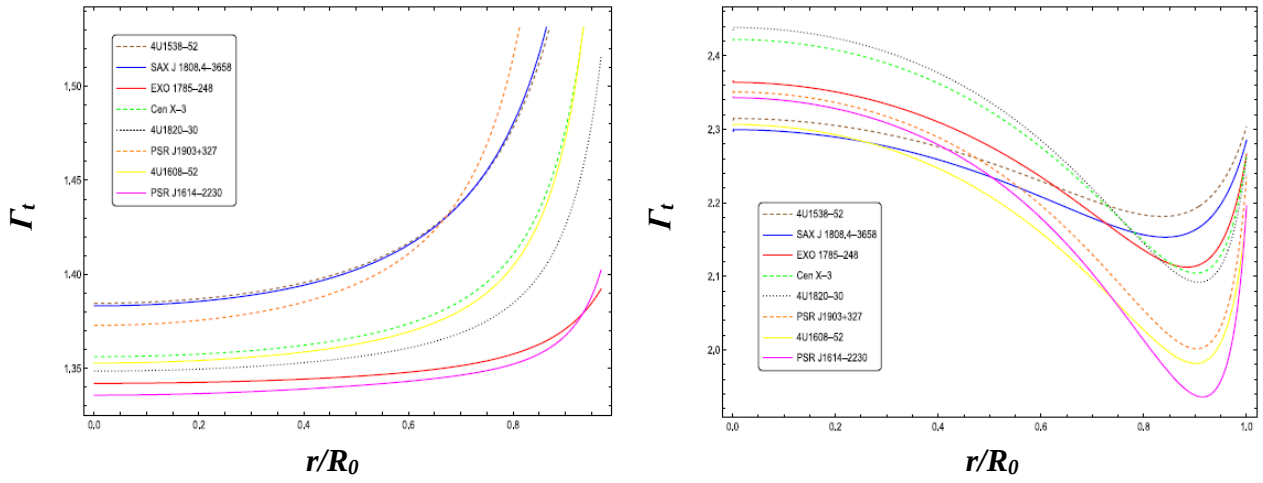
Рисунки 2.20 и 2.21 иллюстрируют, что критерий устойчивости равномерно выполняется во всей звездной конфигурации.



а б

а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.20 – Характер радиального показателя адиабаты Γ_r с радиусом r/R_0



а – Model-1; б – Model-2

Рисунок 2.21 – Характер тангенциального показателя адиабаты Γ_t с радиусом r/R_0

Выводы по второму разделу

Изучение области КЗ в рамках теории $F(R)$ гравитации привело к появлению нескольких захватывающих и заслуживающих внимания открытий. В исследовании внимание сосредоточено на двух конкретных моделях $F(R)$: модель 1, определяемая как $F(R)=R+\alpha\left(e^{-\beta R}-1\right)$, и модель 2, определяемая как $F(R)=R-(1-\delta)\gamma^2\left(\frac{R}{\gamma^2}\right)^{\delta}$. Тщательно изучены последствия этих моделей для структурной целостности и характеристик стабильности КЗ. Исследуя сферу теорий $F(R)$ гравитации, были обнаружены, как эти альтернативные гравитационные модели могут изменить традиционное понимание компактных звездных объектов, поскольку модификации могут оказывать глубокое влияние на сам состав и внутреннюю динамику КЗ. Анализ сосредоточен на практическом применении модели анизотропной жидкости, предполагая, что анзац Дургапала-Фулории управляет внутренней областью сферически-симметричной звездной конфигурации. Конкретно, использованы точные измерения радиусов и масс нескольких известных КЗ, а именно *4U1538-52, SAX J 1808.4-3658, EXO 1785-248, Cen X-3, 4U1820-30, PSR J1903+327, 4U1608-52* и *PSR J1614-2230*. Эти эмпирические ограничения дали ценную информацию о пространстве параметров текущей модели, повлияв на значения задействованных параметров из рассматриваемых моделей $F(R)$ гравитации. Проведено исследование, чтобы проверить предлагаемые решения для звездной модели. Также нами сосредоточено внимание на изучении метрических потенциалов и их регулярности, а также на анализе плотности, давления, энергетических условий, стабильности, параметров УС, компактности,

красного смещения и показателя адиабаты. Эта комплексная оценка проведена в рамках двух различных моделей, обе из которых осуществимы и соответствуют принципам теории гравитации. Ключевым направлением данного исследования оценка стабильности КЗ в рамках моделей $F(R)$ гравитации. Также проведен комплексный анализ, изучив различные критерии стабильности, такие как стабильность гидростатического равновесия с помощью уравнения ТОВ, метод Эрреры и показатель адиабаты. Полученные результаты продемонстрировали, что модели $F(R)$ гравитации могут удовлетворять этим требованиям устойчивости для определенных диапазонов параметров. В рамках этого исследования определили допустимые оценочные значения параметров теории $F(R)$ гравитации, представленные в таблицах 2.1 и 2.2. Применение различных критериев устойчивости, учитывающих как геометрические, так и материальные перспективы, подтвердило обоснованность моделей. Данные исследования также показали, что даже с модификациями $F(R)$ гравитации скорость звука остается соответствующей ограничениям причинности. Установлено, что комбинированные эффекты моделей сильной анизотропии и $F(R)$ гравитации противодействуют гравитационному коллапсу и успешно снижают скорость звука жидкости в пульсарах. В частности, обнаружен, что максимальные значения радиальной скорости звука, υ_r^2, составляют около 0.325 для модели-1 и 0.675 для модели-2 в центре КО. Это открытие более точно соответствует мягким уравнениям состояний, предсказанным гравитационно-волновыми наблюдениями, что свидетельствует о лучшем согласии с астрофизической реальностью. Кроме того, данный анализ показывает, что совместное влияние анизотропии и анзаца Дургапала-Фулории позволяет пульсарам потенциально превышать пределы массы, предсказанные ОТО. Это открытие аналогично изотропному случаю, представленному Асташенком и Капоцциелло и соавторы [97], где они продемонстрировали, что максимальная барионная масса может превосходить гравитационную массу для статических НЗ в рамках теории $F(R)$ гравитации.

Таким образом данный раздел показывает, что $F(R)$ гравитация представляет собой новую и захватывающую основу для понимания свойств КЗ, особенно НЗ. Данная область исследований продолжает развиваться, и такие открытия указывают на то, что такие модели гравитации могут согласовываться как с теоретическими критериями устойчивости, так и с эмпирическими наблюдениями. Это подчеркивает потенциал $F(R)$ гравитации для получения новых знаний об астрофизике этих плотных, подверженных гравитации объектов.

3 АНИЗОТРОПНЫЕ И ЗАРЯЖЕННЫЕ КОМПАКТНЫЕ ЗВЕЗДЫ В $F(\tilde{T})$ ГРАВИТАЦИИ

МТГ рассматривается как возможная теория гравитации, если она способна пройти различные тесты во всех масштабах от режима слабой гравитации, таких как тесты Солнечной системы, до космологических масштабов, например ускоренного расширения Вселенной. Одно исследование предсказывает меньшую допустимую дивергенцию [98] гравитационного потенциала в квадратичном приближении к форме $F(\tilde{T})$ по сравнению с телепараллельным эквивалентом ОТО, включая эффект космологической постоянной с учетом последних наблюдательных ограничений, связанных с солнечной системой. Кроме того, различные тесты, связанные с солнечными системами, были выполнены с использованием полиномиальной формы $F(\tilde{T})$ [99]. Другое исследование подтвердило $F(\tilde{T})$ гравитацию, относящуюся к наблюдательным ограничениям для GW170817 [100] и GRB170817. В исследовании [101] установлено, что $F(\tilde{T})$ гравитация может тривиально удовлетворять ограничениям и являться надежным кандидатом для объяснения сложных проблем во Вселенной. Эффекты космологических напряжений, таких как H_0 и σ_8 [102], кроме того, различные важные приложения $F(\tilde{T})$ гравитации в космологических [103-106], а также в астрофизических исследованиях [107-111].

Обычно КЗ, являющиеся звездными остатками, которые очень массивны и имеют меньший радиус по сравнению с обычными звездами. КЗ, которые являются составными объектами в галактике, привлекают внимание в области исследований космологии и астрофизики. Поскольку галактика состоит из этих КЗ, необходимо, чтобы $F(\tilde{T})$ гравитация могла производить компактные звездообразные решения в режиме сильной гравитации, что должно соответствовать последним наблюдениям относительно соотношения массы и радиуса НЗ. Как правило, конфигурация звездных систем моделируется с учетом изотропной природы жидкости, при которой давление одинаково как в радиальном, так и в тангенциальном направлениях. Однако недавние исследования, касающиеся фазовых переходов типа IIIA в сверхтекучих жидкостях, пионных конденсаций, вращений, влияния магнитных полей и вязкости, указывают на то, что распределение вещества в НЗ могут быть анизотропными [112]. Впоследствии локальная анизотропия становится предметом исследования в нескольких астрофизических исследовательских работах КЗ [113-115]. Действительно, некоторые важные исследования изучают поразительные эффекты анизотропии на конфигурацию и физические свойства НЗ, включая максимальную массу [116,117] вместе с моментом инерции [118] и красным смещением [55, p. 104024], наблюдательные параметры, такие как приливная деформируемость [119] и нерадиальные колебания. Кроме того, считается, что анизотропия может предложить отталкивающую силу для

повышения устойчивости некоторых нестабильных конфигураций [96, p. 025009, 120].

Недавние наблюдения ГВ подтвердили существование НЗ большой массы с массами, которые могут быть близки или превышать предсказанную максимальную массу в ОТО. В итоге этот факт вдохновляет исследователей использовать МТГ для определения максимально допустимой массы НЗ. Например, различные проекты, такие как GBT, NICER и NANOGrav, опубликовали астрофизические данные, которые указывают на то, что большие массы пульсаров действительно существуют в диапазоне 1.44–2.27 $M_{\odot}$ [120,121]. Опять же, вторичным компонентом гравитационно-волнового события GW190814 [122] двойных слияний, как ожидается, будет НЗ с массой в диапазоне 2.5–2.67 $M_{\odot}$. Это событие, естественно, устанавливает верхние границы компактности звезды или на известный предел Бухдаля [31, p. 1027–1033], то есть $M/R \leq 4/9$ в рамках ОТО. Таким образом, может существовать возможность применения менее строгих ограничений на компактность в альтернативных теориях гравитации, таких как $F(\tilde{T})$ гравитация.

Росселанд [123] и другие исследователи [124, 125] представили влияние электрического поля как одну из важных особенностей звездной системы. Несколько исследователей [126, 127] выступили за возможное включение электрических полей в астрофизические системы, которые, как считается, в целом не имеют заряда. Физически нейтральные звездные системы могут достигать ненулевого заряда посредством физических процессов, таких как аккреция. Следовательно, существующий заряд имеет возможность противостоять гравитационной силе благодаря отталкивающей электрической силе и эффективно может избежать гравитационного коллапса звездной заряженной системы. Интересно, что влияние заряда в звездной системе может быть связано с источником анизотропии в заряженной звездной системе. Более того, Сагар и соавторы [128] разработали анизотропную модель, моделируя гибридную звезду, состоящую из гравитирующей барионной материи и линейно связанного отталкивающего поля темной энергии, используя метрику типа Толмена-Бухдаля. В том же направлении трехслойная звездная модель, использующая различные уравнения состояния, модель ядро-оболочка, а также связанная модель темной энергии, основанная на условии Кармаркара, были исследованы Пантом и его соавторами [129].

В исследовательской работе [130] конфигурация КЗ была разработана как анизотропная жидкость, использующая линейную форму $\tilde{T}$ в рамках $F(\tilde{T})$ гравитации и связанная с наблюдательными ограничениями наблюдаемых звезд. В другом исследовании [131] анизотропные звездные объекты исследуются, принимая линейную форму $F(\tilde{T})$ и геометрию Финча-Скеа, чтобы найти природу уравнения состояния внутри звезд. Подобно теории гравитации R^2, разработана невращающаяся и незаряженная компактная звездная модель [132], предполагающая член $\tilde{T}$ в $F(\tilde{T})$ гравитации и политропное уравнение состояния для более жесткой идеальной жидкости. Они определили

дополнительный вклад в тензор энергии-импульса как « $F(\tilde{T})$ жидкость», возникающая из-за нелинейности в $F(\tilde{T})$ гравитации. Недавно в работе [133], включающей поле квинтэссенции, анизотропная и заряженная звездная система с модифицированным газом Чаплыгина успешно представлена на фоне $F(\tilde{T})$ гравитации, где предполагается линейная форма $F(\tilde{T})$ функции.

В данном разделе изучение заряженных и анизотропных звезд, проводится с учетом линейной формы $F(\tilde{T})$ и анзаца метрического потенциала в рамках $F(\tilde{T})$ гравитации. Физические свойства звезды исследуются на фоне внешней метрики Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера. В частности, считается, что пространство-время де Ситтера или вклад положительной космологической постоянной являются причиной ускоренного расширения Вселенной. Для решения уравнений поля рассмотрены анзац для функции заряда и функции анизотропии. Также рассматривается связь физического анализа настоящей модели в $F(\tilde{T})$ гравитации с наблюдательными ограничениями трех известных НЗ большой массы.

3.1 Краткий обзор в $F(\tilde{T})$ гравитации

В этом подразделе рассмотрим основные предположения $F(\tilde{T})$ гравитации. В телепараллелизме поле вирбейна $e_j(x^\mu)$, где i=0,1,2,3, используется как ортонормированный базис для касательного пространства в каждой точке x^μ на многообразии. Это поле вирбейна действует как динамический объект. Каждый вектор e_i может быть описан в координатном базисе его компонентами $e^{\mu}{}_i$, что означает, что вектор может быть представлен как комбинация этих компонент. Уравнение может быть выражено как $e_i = e^{\mu}{}_i \partial\mu$, где μ принимает значения от 0 до 3. В данном контексте будут использованы определенная схема и термины: греческие индексы используются для обозначения координат многообразия пространства-времени, в то время как латинские индексы используются для представления компонентов касательного пространства, связанного с многообразием (пространство-время).

Линейный элемент линии может быть выражен следующим образом для любой заданной метрики пространства-времени:

$$ds^2 = g_{\varpi\varphi} dy^{\varpi} dy^{\varphi} = \eta_{ij} e^i_{\varpi} e^j_{\varphi} dy^{\varpi} dy^{\varphi}. \qquad (3.1)$$

Метрика Минковского обозначается как $\eta_{ij} = (-1,+1,+1,+1)$. Телепараллелизм, в отличие от ОТО, использует связность Вейценбека $F^{\zeta}{}_{\varpi\varphi} = e^{\zeta}{}_A \partial_{\varpi} e^A{}_{\varphi}$, которая отличается от связности Леви-Чивиты, используемой в ОТО. Связность Вейценбека характеризуется геометрией, которая основана на кручении и не обладает кривизной, в отличие от связности Леви-Чивиты в ОТО. Тензор кручения – это математическая формулировка, которая может быть точно определена как:

$$\tilde{T}^{\zeta}{}_{\varpi\varphi} = F^{\zeta}{}_{\varphi\varpi} - F^{\zeta}{}_{\varpi\varphi} = e_b^{\zeta}\left(\partial_{\varpi} e^{b}{}_{\varphi} - \partial_{\varphi} e^{b}_{\varpi}\right). \tag{3.2}$$

В ОТО существует предложение, которое утверждает, что $T^{\zeta}{}_{\bar{\omega}\varphi} = 0$. Принято представлять U_4 как 4-мерное пространственно-временное многообразие, которое имеет как метрику, так и кручение. Многообразия, которые имеют метрику, но не имеют кручения, обозначается как V_4 [134]. Кручение часто возникает в линейных комбинациях в нескольких вычислениях, как показано тензором искривления, который определяется как:

$$P^{\varpi\varphi}{}_{\wp} = -\frac{1}{2}\left(\tilde{T}^{\varpi\varphi}{}_{\wp} - \tilde{T}^{\varphi\varpi}{}_{\wp} - \tilde{T}_{\wp}{}^{\varpi\varphi}\right). \tag{3.3}$$

Определение кососимметричного тензора $S_{\wp}{}^{\varpi\varphi}$:

$$S_{\wp}{}^{\varpi\varphi} = \frac{1}{2}\left(P^{\varpi\varphi}{}_{\wp} + \delta^{\varpi}_{\wp}\tilde{T}^{\beta\varphi}{}_{\beta} - \delta^{\varphi}_{\wp}\tilde{T}^{\beta\varpi}{}_{\beta}\right). \tag{3.4}$$

Скаляр кручения, который действует как телепараллельный лагранжиан, может быть выражен с использованием этих факторов, как указано в работе [135]:

$$\tilde{T} = S_{\wp}{}^{\varpi\varphi}T^{\wp}{}_{\varpi\varphi} = \frac{1}{4}\left(T^{\wp\varpi\varphi}T_{\wp\varpi\varphi} + 2T^{\wp\varpi\varphi}T_{\varphi\varpi\wp} - 4T^{\wp}_{\wp\varpi}T^{\varphi\varpi}{}_{\varphi}\right). \tag{3.5}$$

Чтобы получить уравнение движения для модифицированной $F(\tilde{T})$ гравитации, можно напрямую заменить $\tilde{T}$ на T, как в модифицированном гравитационном действии, соответствующем теории, $F(R)$ гравитации как,

$$S = \int d^4 ye\left[\frac{1}{16\pi} f\left(\tilde{T}\right) + L_{Matter} + L_E\right]. \tag{3.6}$$

В рамках естественных единиц, где гравитационная постоянная G и скорость света c равны в 1, а переменная f символизирует функцию, которая опирается на скаляр кручения $\tilde{T}$. С другой стороны, L_{Matter} соответствует плотности Лагранжа для тензора энергии-импульса $T_{\varpi}^{\wp}$, в то время как L_E обозначает плотность Лагранжа для тензора электромагнитного поля $E_{\varpi}^{\wp}$. Для ясности в работе упоминается, что два используемых символа следующие: $\tilde{T}$ представляет кручение, а T обозначает след тензора энергии-импульса. Это разъяснение дано для того, чтобы избежать какой-либо двусмысленности в работе рассматриваемых нами моделях.

Для того чтобы установить систему уравнений движения, уравнение (3.6) будет дифференцировано относительно поля тетрады:

$$4\left[e_n^{\varpi} S_{\varpi}^{i\wp} \partial_n \tilde{T} f_{\tilde{T}\tilde{T}} + e^{-1}\left(e e_n^a S_{\varpi}^{i\wp}\right) f_{\tilde{T}} + e_n^i \tilde{T}_{ik}^a S_{\varpi}^{\wp k} f_{\tilde{T}}\right] - f e_n^{\wp} = -16\pi e_n^{\varpi}\left(T_{\varpi}^{\wp} + E_{\varpi}^{\wp}\right). \tag{3.7}$$

Обозначения $f_{\tilde{T}}$ и $f_{\tilde{T}\tilde{T}}$ используются для представления: $f_{\tilde{T}} = \partial f / \partial \tilde{T}$ и $f_{\tilde{T}\tilde{T}} = \partial^2 f / \partial \tilde{T}^2$ соответственно. Предполагая анизотропную материю как жидкость, тензор энергии-импульса определяется следующим образом:

$$T_{\varpi}^{\wp} = \left(P_t + \rho\right) H_{\varpi} H^{\wp} - P_t \delta_{\varpi}^{\wp} + \left(P_r - P_t\right) N_{\varpi} N^{\wp}. \tag{3.8}$$

Представление четырех-скоростного и радиального четырех-векторов задается как $H_{\wp} = e^l \delta_{\wp}^0$ и $N_{\wp} = e^{\wp} \delta_{\wp}^1$ соответственно.

В области $F\left(\tilde{T}\right)$ гравитации уравнение движения может быть выражено альтернативным способом с помощью формализма ковариантной производной

$$16\pi\left[G_{\varpi\varphi} f_{\tilde{T}} + S_{\varpi\varphi}^{\wp} \nabla_{\wp} \tilde{T} f_{\tilde{T}\tilde{T}} + \frac{\tilde{T}}{2}\left(\frac{f}{\tilde{T}} - f_{\tilde{T}}\right) g_{\varpi\varphi}\right] = \left(E_{\varpi\varphi} + T_{\varpi\varphi}\right). \tag{3.9}$$

где $G_{\varpi\varphi}$ известен нам как тензор Эйнштейна. Уравнение (3.9) явно дает формулы ОТО для линейной функции $F\left(\tilde{T}\right)$, в частности, когда $F\left(\tilde{T}\right)$ эквивалентно $\tilde{T}$. Впоследствии внимание будет сосредоточено на внутренней структуре сферически симметричного и стационарного распределения жидкости, которое может быть охарактеризовано как:

$$ds^2 = e^{A(r)} dt^2 - e^{B(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\Omega^2. \tag{3.10}$$

Символы $A(r)$ и $B(r)$ представляют два гравитационных потенциала, которые зависят исключительно от радиальной координаты r. Более того, будет выведены компоненты тензора энергии-импульса для анизотропной системы как

$$T_{\varpi}^{\varphi} = diag\left(\rho, -P_r, P_t, -P_t\right), \tag{3.11}$$

с

$$T_{\varpi}^{\varphi} = 0, \text{ когда } \varpi \neq \varphi. \tag{3.12}$$

Метрические потенциалы A и B отвечают за определение значения анизотропии давления Δ. Величину анизотропии давления можно рассчитать по формуле: $\Delta = P_t - P_r$. С другой стороны, ниже приведен еще один метод для характеристики тензора электромагнитного поля:

$$E_{\varpi\varphi} = \frac{1}{4\pi}\left(- F_{\varpi}^{\wp} F_{\varphi\wp} + \frac{1}{4} g_{\varpi\varphi} F_{\beta\wp} F^{\beta\wp} \right), \tag{3.13}$$

символы $F_{\varpi\varphi}$ характеризуют антисимметричный тензор электромагнитного поля. Кроме того, F_{01} и F_{10} являются только ненулевыми компонентами $F_{\varpi\varphi}$, связанными через формулу: $F^{01} = -F^{10}$. Связь между электрическим полем E и компонентами F_{01} и F_{10}, а также метрическими функциями $B(r)$ и $A(r)$, можно сформулировать следующим образом:

$$F^{01} = -F^{10} = Ee^{-(B+A)/2}. \tag{3.14}$$

Выражение для электрического заряда $q(r)$ в сферической структуре с радиальными координатами r может быть определено с использованием релятивистского закона Гаусса и соответствующего электрического поля E как

$$q(r) = \frac{1}{2}\int_0^r e^{\lambda/2}\sigma r^2 dr = r^2\sqrt{-F^{10}F_{10}} \tag{3.15}$$

$$E^2 = -F^{10}F_{10} = \frac{q^2}{r^4}. \tag{3.16}$$

С другой стороны, в уравнении (3.8) тетрадная матрица для линейного элемента представлена следующим уравнением

$$\left[e_{\varpi}^{\sigma}\right] = diag\left[e^{A/2}, e^{B/2}, r, r\sin\theta\right]. \tag{3.17}$$

Наоборот, определитель этого тензора может быть выражен как [136]:

$$e = \det\left[e_{\varphi}^{\varpi}\right] = r^2 e^{A/2} e^{B/2}\sin\theta. \tag{3.18}$$

В контексте радиальной координаты r скаляр кручения вместе с его производной можно определить как [137]

$$\tilde{T}(r) = \frac{2}{e^B}\left[\frac{A'}{r} + \frac{1}{r^2}\right], \tag{3.19}$$

$$\tilde{T}'(r) = \frac{2}{re^B}\left[\frac{r^2 A''}{r^2} - \left(\frac{A'+1}{r}\right)\left(\frac{B'+1}{r}\right)\right]. \tag{3.20}$$

Здесь символ ($'$) обозначает производную по r. Уравнения поля для $F(\tilde{T})$ гравитации могут быть построены просто путем подстановки ранее указанного

тетрадного поля из уравнения (3.17) и вставки скаляра кручения и его производной в уравнение (3.7):

$$8\pi\rho+\frac{q^2}{r^4}=\frac{\partial f}{\partial\tilde{T}}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}e^{-B}\left(B'+A'\right)-\tilde{T}\left(r\right)\right]+\frac{F\left(\tilde{T}\right)}{2}, \tag{3.21}$$

$$8\pi P_r-\frac{q^2}{r^4}=\frac{\partial f}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{r^2}+\tilde{T}\left(r\right)\right]-\frac{F\left(\tilde{T}\right)}{2}, \tag{3.22}$$

$$8\pi P_t+\frac{q^2}{r^4}=\frac{\partial f}{\partial\tilde{T}}\left[e^{-B}\left(\frac{A''}{2}-\left(B'-A'\right)\left(\frac{1}{2r}+\frac{A'}{4}\right)\right)+\frac{\tilde{T}\left(r\right)}{2}\right]-\frac{F\left(\tilde{T}\right)}{2}. \tag{3.23}$$

Уравнения поля, сформулированные ранее, приводят к аналогичным уравнениям поля в ОТО, когда $F\left(\tilde{T}\right)=T$, как показано в уравнениях (3.21)-(3.23). В рамках $F\left(\tilde{T}\right)$ гравитации дополнительный недиагональный множитель получается следующим образом:

$$\frac{\cot\theta}{2r^2}T'\frac{\partial^2 f}{\partial\tilde{T}^2}=0. \tag{3.24}$$

Потенциальные результаты, вытекающие из уравнения (3.24), можно разделить на две категории: (i) когда $\tilde{T}'$ равно нулю и (ii) когда $f_{\tilde{T}\tilde{T}}$ равно нулю. Для получения простой функциональной модели для функции $F\left(\tilde{T}\right)$ будет использован второй случай, который дает:

$$F\left(\tilde{T}\right)=\zeta_1\tilde{T}+\zeta_2. \tag{3.25}$$

Здесь параметры ζ_1 и ζ_2 используются для представления констант, которые возникают в процессе интегрирования. Цель состоит в том, чтобы определить окончательный вид уравнений поля для $F\left(\tilde{T}\right)$ гравитации. Таким образом, уравнения поля (3.21)-(3.23) преобразуются согласно уравнению (3.25) и принимают свой окончательный вид как [136]:

$$\rho=\frac{1}{16\pi r^2}\left[2\zeta_1+2e^{-B}\zeta_1\left(rB'-1\right)-r^2\zeta_2\right], \tag{3.26}$$

$$P_r=\frac{1}{16\pi r^2}\left[-2\zeta_1+2e^{-B}\zeta_1\left(rA'+1\right)+r^2\zeta_2\right], \tag{3.27}$$

$$P_t=\frac{e^{-B}}{32\pi r}\left[2e^{B}r^2\zeta_2+\zeta_1\left(2+rA'\right)\left(A'-B'\right)+2r\zeta_1A''\right]. \tag{3.28}$$

3.2 Точное решение в $F(\tilde{T})$ гравитации

Системы $F(\tilde{T})$ - гравитации (3.27)-(3.28) состоят из пяти неизвестных величин: ρ, P_r, P_t, B и A. Чтобы получить точное решение для этой конкретной системы, необходимо решить уравнение анизотропии давления как:

$$e^{-B}\left[e^{B}\left(4\zeta_1-\frac{8q^2}{r^2}\right)-\zeta_1\left(B'r\left(A'r+2\right)-2A''r^2-A'^2r^2+2A'r+4\right)\right]=32\pi r^2\Delta\,. \tag{3.29}$$

Из-за наличия трех неизвестных величин в уравнении анизотропии давления (3.29) необходимо иметь два условия для решения дифференциального уравнения. По этой причине выбирается физически приемлемый анзац для потенциала $B(r)$ в форме

$$B(r)=2\ln\left(1+Yr^2\right), \tag{3.30}$$

где $Y-$ константа с размерностью l^{-2}.

На основании уравнения (3.30), упомянутого выше, когда значение r приближается к нулю, экспоненциальная функция e^B стремится к 1. Метрический потенциал e^B считается физически допустимым, поскольку он не имеет никаких особенностей в центре физической системы. Кроме того, эта метрическая функция обеспечивает плотность, которая уменьшается (верхняя левая панель рисунка 3.1). Также упоминается, что недавно Баски и другие [22, p. 92-1-92-17] использовали эту метрическую функцию для нахождения анизотропного решения для компактной модели звезды, включающей эффект медленного вращения. После объединения уравнений (3.29) и (3.30) получим:

$$\zeta_1\left[2r\left(A''r^2Y+A''+2r^2Y^2\left(r^2Y+3\right)\right)A'^2\left(r^3Y+r\right)-2A'\left(3r^2Y+1\right)\right]=4r\left(\frac{2q^2}{r^4}+8\pi\Delta\right)\left(r^2Y+1\right)^3. \tag{3.31}$$

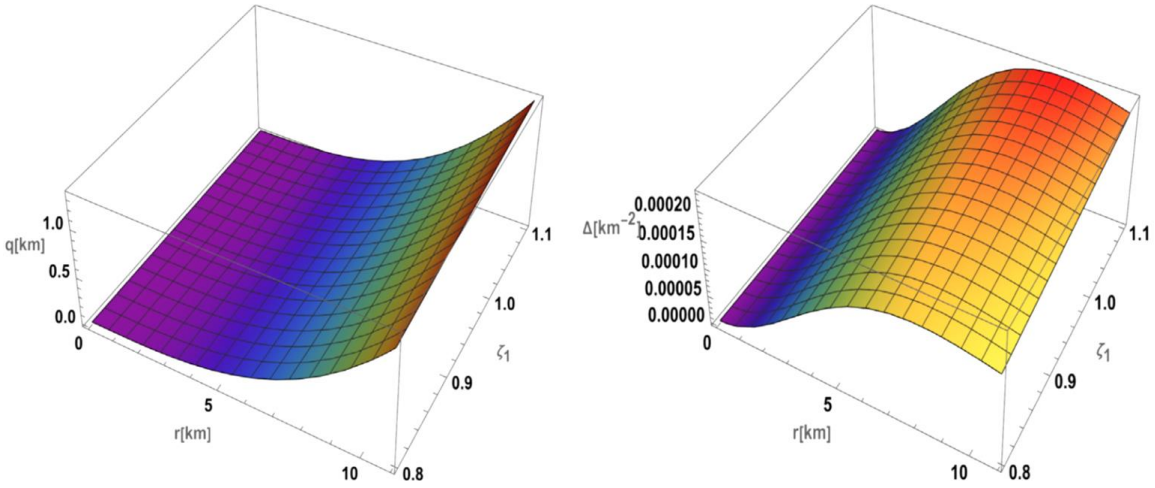
В стабилизированных звездных структурах анизотропия, как полагают, исчезает в ядре, что означает, что радиальное давление P_r равно тангенциальному давлению P_t в данной точке. Однако анизотропная сила $2(P_t-P_r)/r$ может быть как притягивающей, так и отталкивающей. Более того, электрический заряд должен стать нулевым при $r=0$ и положительным для всех значений r больше нуля. Теперь предполагается решить следующее условие, включив фактор анизотропии:

$$\Delta\ =\frac{\zeta_1Y^2r^2\left(Yr^2+3\right)}{8\pi\left(Yr^2+1\right)^3}, \tag{3.32}$$

$$\frac{8rq^2}{r^4}\left(r^2Y+1\right)^3=\zeta_1\left[2A''r\left(r^2Y+1\right)+A'^2\left(r^3Y+r\right)-2A'\left(3r^2Y+1\right)\right], \tag{3.33}$$

чтобы получить решение в замкнутой форме для уравнения (3.22), необходимо найти физически возможное выражение электрического заряда $q(r)$. Для этого будет использовано предположение, что электрический заряд $q(r)$ может быть описан определенным анзацем $q(r)=\sqrt{\zeta_1 q_0 r^6}$. В этом уравнении константа q_0 называется параметром заряда. После использования этого выражения заряда в уравнении (3.22) и проинтегрируя его, получим

$$A(r)=2\ln\left[L_1\cosh\left(\frac{\sqrt{q_0}\,r^2\left(r^2Y+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)+L_2\sinh\left(\frac{\sqrt{q_0}\,r^2\left(r^2Y+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{3.34}$$



а б

Рисунок 3.1 – Зависимость электрического заряда q и анизотропии Δ от радиальной координате r и параметра кручения ζ_1 при значениях параметров $Y=0.01\,км^{-2}$, $\zeta_2=0.0001$ и $q_0=10^{-6}$

Теперь выражение для давления и плотности:

$$8\pi\rho=-\frac{\zeta_2}{2}-\zeta_1 q_0 r^2+\frac{\zeta_1 Y\left(r^4Y^2+3r^2Y+6\right)}{\left(r^2Y+1\right)^3}, \tag{3.35}$$

$$8\pi P_r=\frac{\zeta_2}{2}+\zeta_1\left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{q_0}\left[f_1(r)L_1+f_2(r)L_2\right]}{\left(r^2Y+1\right)\left[f_1(r)L_2+f_2(r)L_1\right]}-\frac{Y\left(r^2Y+2\right)}{\left(r^2Y+1\right)^2}\right)+\zeta_1 q_0 r^2, \tag{3.36}$$

$$8\pi P_t = \frac{1}{2\left(r^2Y+1\right)^3\left[f_1(r)L_2 + f_2(r)L_1\right]}\Big[L_2\Big(4\zeta_1\Big[f_1(r)q_0r^2\left(r^2Y+1\right)^3 - \\ - f_1(r)Y + \sqrt{2}\,f_2(r)\sqrt{q_0}\times\left(r^2Y+1\right)^2\Big] + \zeta_2 f_1(r)\left(r^2Y+1\right)^3\Big) + \\ + L_1\Big(4\zeta_1\Big(\sqrt{2}\,f_1(r)\sqrt{q_0}\left(r^2Y+1\right)^2 + f_2(r)q_0r^2\left(r^2Y+1\right)^3 + \\ + f_2(r)(-Y)\Big) + \zeta_2 f_2(r)\left(r^2Y+1\right)^3\Big)\Big] - \zeta_1 q_0 r^2, \tag{3.37}$$

где

$$f_1(r) = \sinh\left(\frac{\sqrt{q_0}r^2\left(r^2Y+2\right)}{2\sqrt{2}}\right), \qquad f_2(r) = \cosh\left(\frac{\sqrt{q_0}r^2\left(r^2Y+2\right)}{2\sqrt{2}}\right).$$

3.3 Граничные условия в $F(\tilde{T})$ гравитации

Кроме того, необходимо, чтобы внутренняя метрика плавно связана с внешней метрикой на ее внешней поверхности $r = R$. Это требует, чтобы первая и вторая фундаментальные структуры были непрерывны по всей внешней поверхности. Внешнее пространство-время характеризуется внешней метрикой Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{3.38}$$

где Λ обозначает космологическую постоянную, которая удовлетворяет следующему соотношению: $\Lambda = \zeta_2 / 2\zeta_1$.

Следует отметить, что отрицательные и положительные значения космологической постоянной соответствуют КЗ в пространствах-временах анти-де Ситтера де Ситтера и соответственно. При изучении КЗ положительное космологическое значение физически более надежно, чем отрицательные значения из-за ускоряющегося расширения Вселенной. Поэтому выбирается положительное значение для моделирования КО. Чтобы выполнить вышеупомянутые критерии, начальная и последующая основные формы (известные как условия Израэля-Дармуа [24, p. 2-46; 25, p. 1–13]) могут быть математически представлены следующим образом:

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}R^2\right) = e^{A(R)}, \tag{3.39}$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}R^2\right) = e^{-B(R)}, \tag{3.40}$$

$$P_r(R) = 0. \tag{3.41}$$

Используя эти требования, будет получено математическое решение для последующих констант:

$$\frac{L_1}{L_2}=-\Big[2\zeta_1\Big(F_1(R)q_0\left(R^3Y+R\right)^2-F_1(R)Y\left(R^2Y+2\right)+2\sqrt{2}F_2(R)\times$$
$$\times\sqrt{q_0}\left(R^2Y+1\right)\Big)+\zeta_2F_1(R)\left(R^2Y+1\right)^2\Big]\times\Big[2\zeta_1\Big(2\sqrt{2}F_1(R)\sqrt{q_0}\left(R^2Y+1\right)+ \quad (3.42)$$
$$+F_2(R)q_0\left(R^3Y+R\right)^2-F_2(R)Y\left(R^2Y+2\right)\Big)+\zeta_2F_2(R)\left(R^2Y+1\right)^2\Big]^{-1},$$

$$M=\frac{R^3\Big[3\zeta_1q_0\left(R^3Y+R\right)^2+3Y\left(R^2Y+2\right)-\Lambda\left(R^2Y+1\right)^2\Big]}{6\left(R^2Y+1\right)^2}, \quad (3.43)$$

$$L_1=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\left(R^2Y+1\right)^2}}}{\dfrac{L_1}{L_2}\cosh\left(\dfrac{\sqrt{q_0}R^2\left(R^2Y+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)+\sinh\left(\dfrac{\sqrt{q_0}R^2\left(R^2Y+2\right)}{2\sqrt{2}}\right)} \quad (3.44)$$

с

$$F_1(R)=\sinh\left(\frac{\sqrt{q_0}R^2\left(R^2Y+2\right)}{2\sqrt{2}}\right), \qquad F_2(R)=\cosh\left(\frac{\sqrt{q_0}R^2\left(R^2Y+2\right)}{2\sqrt{2}}\right). \quad (3.45)$$

3.4 Физическая характеристика решения

3.4.1 Давления, плотность и анизотропия компактных звезд

Анизотропная звездная конфигурация, описываемая линейной форме функции f в $F(\tilde{T})$ – гравитации, может считаться физически приемлемой на основании анализа допустимых величин - плотности энергии, радиального и тангенциального давлений, а также анизотропии системы. Рисунок 3.1 (а) показывает, что анзац, связанный с функцией заряда и рисунок 3.1 (б) функцией анизотропии, удовлетворяет всем физическим нормам. Примечательно, что изменение анизотропии и функции заряда имеет возрастающий характер по отношению к радиальному расстоянию и параметрам кручения. Параметр кручения влияет на поверхностную анизотропию, которая увеличивается таким образом, что анизотропная сила развивается во внешнем направлении для стабилизации звездной конфигурации. Это очевидно из рисунков 3.2 и 3.3 следует, что компоненты тензора энергии-импульса, то есть $\rho, P_r, P_t,$ положительны, а также убывают при изменении радиального расстояния по всей звезде.

С другой стороны, рассмотрены следующие энергетические условия:

1. Условие нулевой энергии: это условие требует, чтобы сумма плотности энергии и радиального давления была неотрицательной, то есть $\rho+P_r\geq 0$.

2. Слабое энергетическое условие: это условие предусматривает, что плотность энергии должна быть неотрицательной, а сумма плотности энергии и любого основного давления также должна быть неотрицательной, то есть $\rho \geq 0$ и $\rho + P_i \geq 0$ для всех главных давлений P_i.

3. Сильное энергетическое условие: это условие требует, чтобы сумма плотности энергии и трех давлений была неотрицательной, то есть $\rho + \sum P_i \geq 0$.

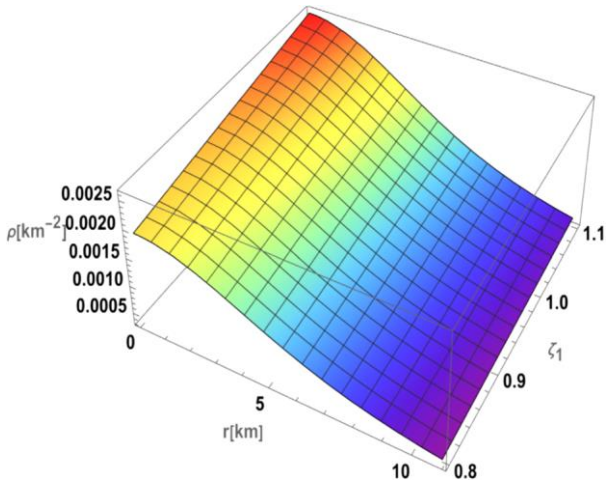
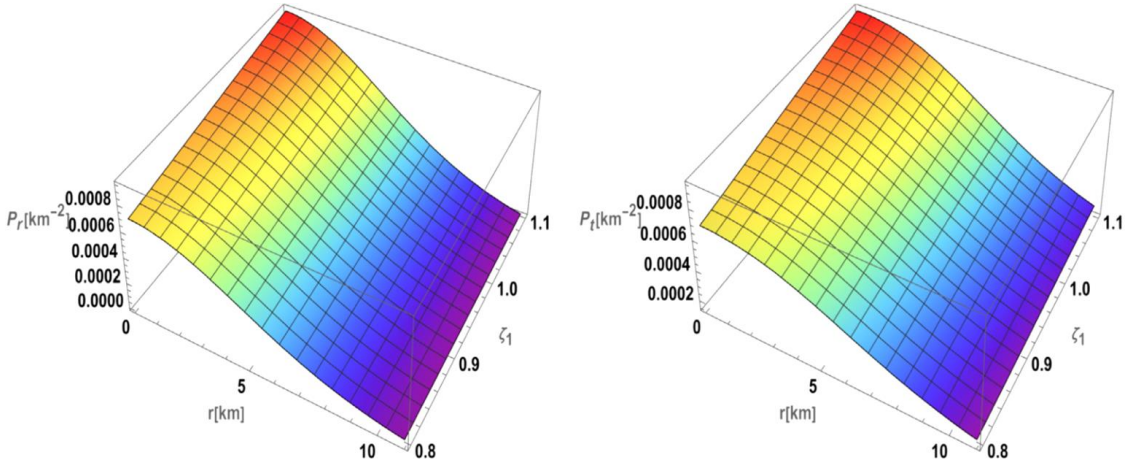


Рисунок 3.2 – Зависимость плотности энергии $\rho(r)$ от радиальной координаты r и параметра кручения ζ_1 при значениях параметров $Y = 0.01\,км^{-2}$, $\zeta_2 = 0.0001$ и $q_0 = 10^{-6}$



а б

Рисунок 3.3 – Зависимость радиального $P_r(r)$ и тангенциального давления $P_t(r)$ от радиальной координаты r и параметра кручения ζ_1 при значениях параметров $Y = 0.01\,км^{-2}$, $\zeta_2 = 0.0001$ и $q_0 = 10^{-6}$

Анализ графических зависимостей плотности энергии, радиального и тангенциального давлений показаны, что полученные решения удовлетворяют энергетическим условиям для анизотропно-заряженных звездных систем,

подтверждая физическую приемлемость модели. Это важный шаг в проверке самосогласованности и надежности точных и несингулярных решений, полученных в контексте $F(\tilde{T})$ гравитации.

Увеличение значений параметра кручения постепенно увеличивает величину заряда и анизотропии на поверхности звезды. С другой стороны, значения плотности энергии, радиального и тангенциального давления в центре звезды увеличиваются при увеличении вариации ζ_1 . Данный результат согласуется с рисунками 3.1, 3.2 и 3.3 вместе с таблицей 3.1, где центральные и поверхностные значения этих величин были перечислены для изменения ζ_1. Таким образом, параметр кручения имеет прямое влияние на физические величины, которые управляют настоящей звездной системой. Интересно отметить из рисунка 3.3, что центральные значения радиального и тангенциального давления абсолютно одинаковы, что приводит к нулевой анизотропии в центре, что является одним из важных критериев, выполненных для звездной модели и показанных на правой панели рисунка 3.1.

3.4.2 Гидростатическое равновесие компактных звезд

Устойчивость анизотропной и заряженной КЗ зависит от различных сил, таких как гравитационная сила F_g , гидростатическая сила F_h , анизотропная сила F_a и электрическая сила F_e . Вклад этих сил в совокупности определяет условие устойчивого равновесия, которое известно как уравнение ТОВ, задаваемое как

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{A'}{2}(P_r + \rho) + \frac{q}{4\pi r^4}\frac{dq}{dr} + \frac{2\Delta}{r}. \tag{3.46}$$

Уравнение (3.46) выше можно записать в различных компонентах силы как [138]

$$F_g = -\frac{A'}{2}(P_r + \rho),\ F_h = -\frac{dP}{dr},\ F_a = \frac{2\Delta}{r},\ F_e = \frac{q}{4\pi r^4}\frac{dq}{dr}, \tag{3.47}$$

чьи явные выражения даны как

$$\begin{aligned} F_g = &-\frac{1}{\left(r^2Y+1\right)^2\left(L_2 f_1(r)+L_1 f_2(r)\right)^2}\Big[2\sqrt{2}\zeta_1\sqrt{q_0}\,r\left[L_1 f_1(r)+L_2 f_2(r)\right]\times \\ &\times\Big(L_1\left\{\sqrt{2}\sqrt{q_0}\left(r^2Y+1\right)^2 f_1(r)+2Y\times f_2(r)\right\}+L_2\left(2Yf_1(r)+\sqrt{2}\sqrt{q_0}\left(r^2Y+1\right)^2 f_{21}(r)\right)\Big)\Big], \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$F_h = -\frac{1}{\left(r^2Y+1\right)^2\left(L_2 f_1(r)+L_1 f_2(r)\right)^2}\Big[\zeta_1 r\Big[2L_2L_1\Big\{-2\sqrt{2}\,f_3(r)\sqrt{q_0}Y\times$$
$$\times\left(r^2Y+1\right)+\,f_3(r)q_0\left(r^2Y+1\right)^3+\,f_3(r)Y^2\left(r^2Y+3\right)\Big\}+ \qquad (3.49)$$
$$+L_2^2\left(2f_1^{\,2}(r)Y^2\left(r^2Y+3\right)-2\sqrt{2}\,f_3(r)\sqrt{q_0}Y\times\left(r^2Y+1\right)+\left(f_3(r)-5\right)q_0\left(r^2Y+1\right)^3\right)+$$
$$+L_1^2\left(2f_2^{\,2}(r)Y^2\left(r^2Y+3\right)-2\sqrt{2}\,f_3(r)\sqrt{q_0}Y\times\left(r^2Y+1\right)+\left(f_3(r)-5\right)q_0\left(r^2Y+1\right)^3\right)\Big],$$

$$F_a = \frac{2\zeta_1 rY^2\left(r^2Y+3\right)}{\left(r^2Y+1\right)^3}, \qquad (3.50)$$

$$F_e = \frac{6\zeta_1 q_0 r}{8\pi}, \qquad (3.51)$$

где

$$f_3(r)=\sinh\left(\frac{\sqrt{q_0}r^2\left(r^2Y+2\right)}{\sqrt{2}}\right),\ f_4(r)=\cosh\left(\frac{\sqrt{q_0}r^2\left(r^2Y+2\right)}{\sqrt{2}}\right). \qquad (3.52)$$

В соответствии с рисунком 3.4, представлен график сил в терминах изменений параметра кручения ζ_1. Силы увеличиваются индивидуально с небольшими приращениями ζ_1 по всей звезде. Гравитационная сила, которая определяется путем включения плотности энергии и радиального давления, показывает притягивающую природу по всей звезде. Напротив, другие силы F_e, F_h, F_a являются отталкивающими и положительными внутри звезды. Как можно видеть из уравнения ТОВ и рисунка 3.4, результирующая F_e, F_h, F_a уравновешивают гравитационную силу. Это означает, что текущая звездная конфигурация достигла устойчивого равновесия в $F\left(\tilde{T}\right)$ гравитации.

3.4.3 Условие причинности модели

Важно проверить, удовлетворяет ли физически обоснованная звездная система условию причинности внутри звезды. Это дополнительно подтверждает устойчивость анизотропной и заряженной звездной конфигурации. Условие причинности модели определяется через уравнение (2.49), изменение радиальной координаты и параметра кручения графически, показано на рисунке 3.5.

Численные значения υ_r^2 и υ_t^2, как видно, положительны и меньше единицы по всей звезде. Результат согласуется с условием причинности, согласно которому скорость звука не превышает скорости света, то есть $0\le\upsilon_r^2\le 1$ и $0\le\upsilon_t^2\le 1$. Влияние увеличения значений ζ_1 на условие причинности является номинальным.

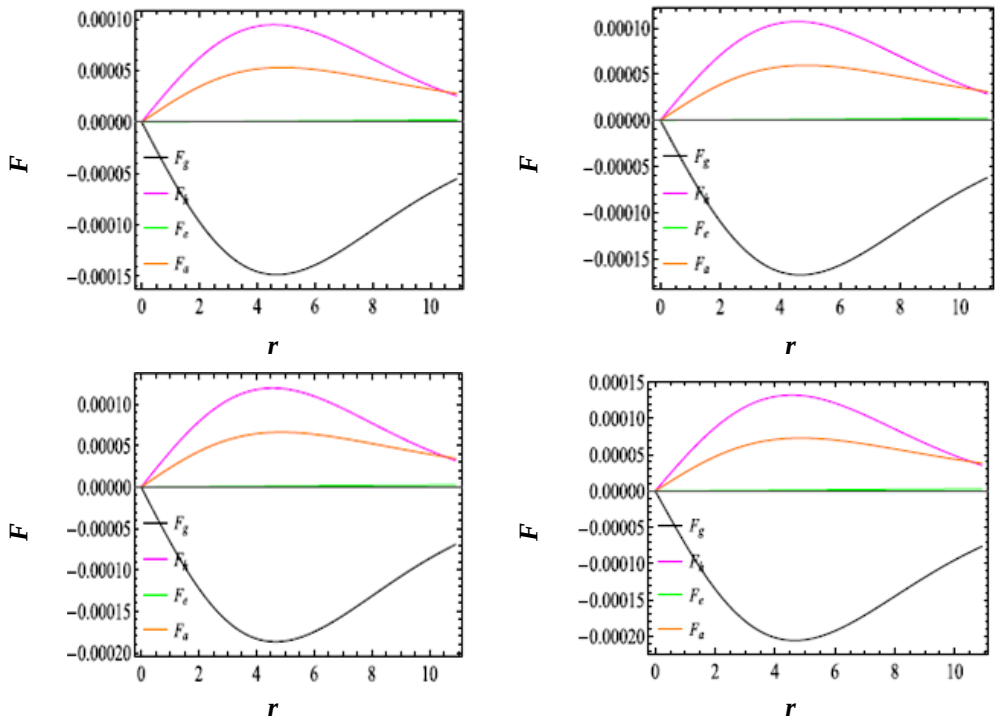
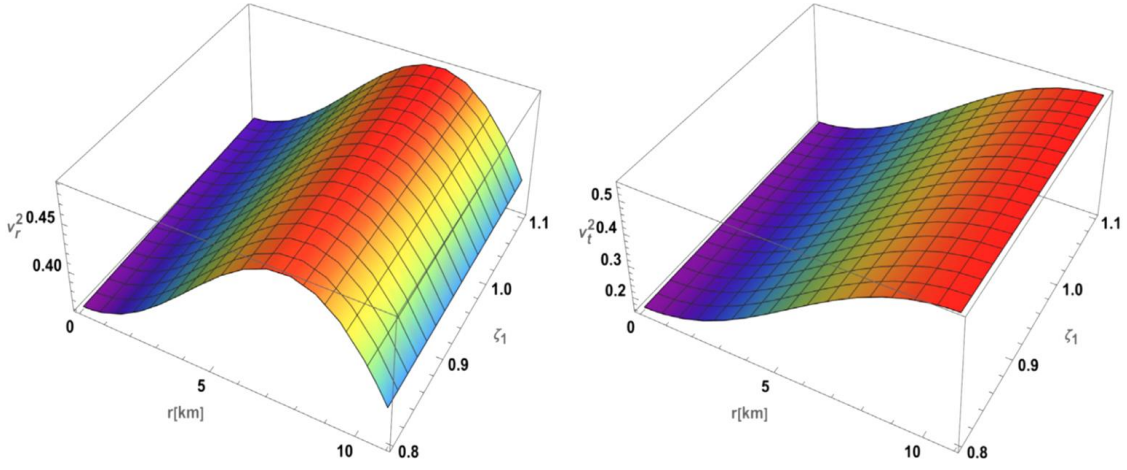


Рисунок 3.4 – Зависимость различных сил F_g, F_h, F_a и F_e от радиальной координаты r и параметра кручения ζ_1

Примечание - i. для $\zeta_1 = 0.8$ - вверху слева, ii. для $\zeta_1 = 0.9$ - вверху справа, iii. для $\zeta_1 = 1.0$ - внизу слева и iv. для $\zeta_1 = 0.8$ - внизу справа для фиксированных значениях параметров $Y = 0.01\,км^{-2}$, $\zeta_2 = 0.0001$ и $q_0 = 10^{-6}$



а б

Рисунок 3.5 – Радиальная скорость звука υ_r^2 и тангенциальная скорость звука υ_t^2 по радиальной координате r и параметру кручения ζ_1 при значениях параметров $Y = 0.01\,км^{-2}$, $\zeta_2 = 0.0001$ и $q_0 = 10^{-6}$

3.4.4 Показатель адиабаты заряженных объектов

Показатель адиабаты определяется с помощью уравнения (1.39). В случае устойчивых звездных конфигураций с изотропной жидкостью значение Γ должно превышать 4/3 [53, p. 657-664; 95,p. 51-54]. Однако в контексте анизотропии условие устойчивости (3.52), связанное с адиабатическим условием, модифицируется следующим образом [14, p. 533–543]:

$$\Gamma > \frac{4}{3} + \left[\frac{4}{3} \frac{(P_t - P_r)}{\left| (P_r)' \right| r} \right], \tag{3.53}$$

изменение показателя адиабаты для настоящей звездной модели показано на рисунке 3.6 относительно радиальной координаты и параметра кручения. Видно, что показатель адиабаты является возрастающей функцией как r, так и ζ_1. Данные из таблицы 3.1 показывают, что значения показателя адиабаты больше 4/3 для различных значений ζ_1 в центре звезды, где анизотропия равна нулю. По всей звезде Γ медленно растет при увеличении ζ_1, что приводит к более подходящей ситуации для достижения устойчивости звезды.

Таблица 3.1 – Числовые значения давления $P(r)$, плотности $\rho(r)$, констант A и B, центрального значения показателя адиабаты Γ_0 и электрического заряда Q

Параметры	P_0 (дин/см^2)	ρ_0 (г/см^3)	ρ_s (г/см^3)	L_1	L_2	Γ_0	$Q(C)$
ζ_1 = 0.8	$8.31681 \cdot 10^{35}$	$2.57492 \cdot 10^{15}$	$4.42304 \cdot 10^{14}$	0.153512	2.24933	1.3645	$1.35047 \cdot 10^{20}$
ζ_1= 0.9	$9.41211 \cdot 10^{35}$	$2.89712 \cdot 10^{15}$	$4.97927 \cdot 10^{14}$	0.153182	2.25181	1.3691	$1.43239 \cdot 10^{20}$
ζ_1 = 1.0	$1.05076 \cdot 10^{36}$	$3.21932 \cdot 10^{15}$	$5.53551 \cdot 10^{14}$	0.152918	2.25379	1.3728	$1.50987 \cdot 10^{20}$
ζ_1 = 1.1	$1.16033 \cdot 10^{36}$	$3.54152 \cdot 10^{15}$	$6.09175 \cdot 10^{14}$	0.152702	2.25541	1.37583	$1.58357 \cdot 10^{20}$

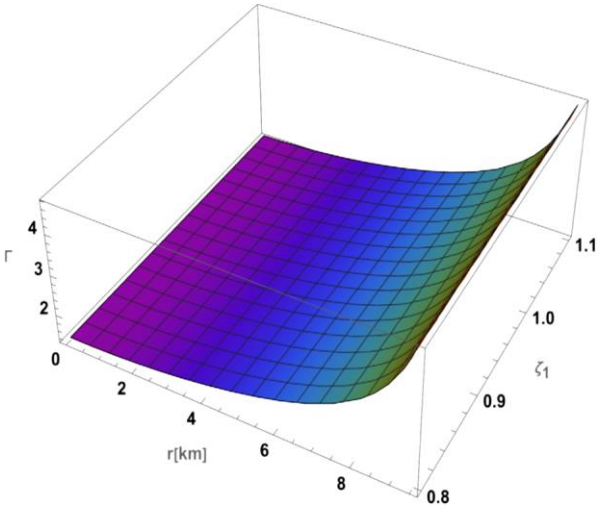


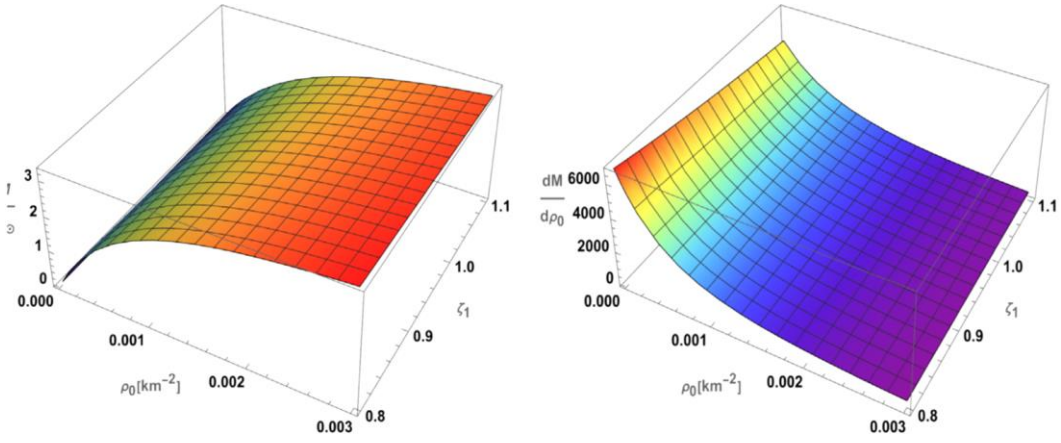
Рисунок 3.6 – Показатель адиабаты по радиальной координате r и параметру кручения ζ_1 при значениях параметров $Y = 0.01\,км^{-2}$, $\zeta_2 = 0.0001$ и $q_0 = 10^{-6}$

3.4.5 Анализ устойчивости заряженных структур

Полученные результаты используются для соблюдения критериев устойчивости ХЗН. Чтобы проверить условие для электрически заряженного решения, определяется уравнение массы как уравнение M и его производную относительно ρ_0, используя определенный подход:

$$M = \frac{R}{2}\left[1 - \frac{144\zeta_1^{\,2}}{\left[R^2(16\pi\rho_0 - \zeta_2) + 12\zeta_1\right]} + \zeta_1 q_0 R^4\right], \tag{3.54}$$

$$\frac{dM}{d\rho_0} = \frac{2304\pi\zeta_1^{\,2}R^3}{\left[R^2(16\pi\rho_0 - \zeta_2) + 12\zeta_1\right]^3}. \tag{3.55}$$



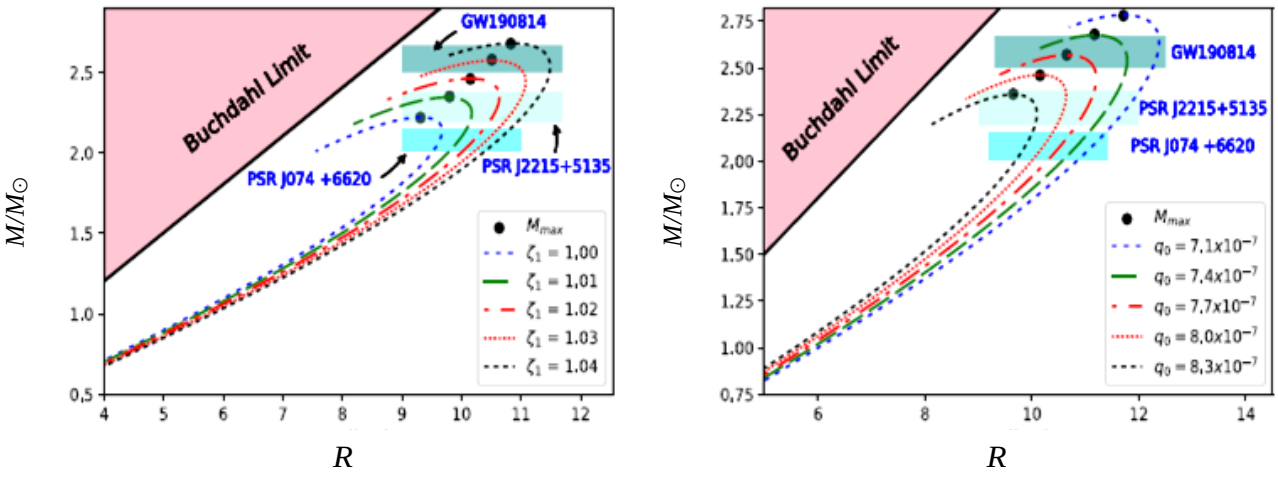
а б

Рисунок 3.7 – Зависимость $M/M_\odot$ и градиента массы $dM/d\rho_0$ от центральной плотности ρ_0 и параметра кручения ζ_1, при значениях параметров $Y = 0.01\,км^{-2}$, $\zeta_2 = 0.0001$ и $q_0 = 10^{-6}$

Полная масса M графически представлена относительно ρ_0 и ζ_1 на рисунке 3.7 (а). Очевидно, что M является возрастающей функцией относительно изменения ρ_0. Кроме того, графическая природа производной M относительно ρ_0 показана на рисунке 3.7 (б). Очевидно, что $dM/d\rho_0$ положительна по всей звезде. Это соответствует критериям ХЗН для стабильной звездной конструкции. Примечательно, что наблюдается минимальное изменение полной массы относительно центральной плотности ρ_0 при изменении ζ_1. Опять же, небольшое улучшение стабильности звездной системы обнаружено с уменьшением.

3.5 Соотношение масса-радиус компактных звезд

Физическая обоснованность ζ_1 настоящей звездной конфигурации в рамках $F(\tilde{T})$ гравитации подтверждается кривыми M-R. Показано соотношение $M-R$ для фиксированной плотности порядка $10^{14}\ г/см^{-3}$ в центре относительно различных значений параметра кручения ζ_1 и параметра заряда q_0 на рисунка 3.8 (а) и (б) соответственно.



а б

Рисунок 3.8 – Влияние параметра кручения ζ_1 на $M/M_\odot$ и радиус R для, $\zeta_1 = 1.02$ показанное на левой панели

Примечание – Влияние параметра заряда q_0 на $M/M_\odot$ и радиус R для $q_0 = 8.0 \cdot 10^{-7}$ показано на правой панели

Очевидно, что в обоих случаях соотношение $M-R$ удовлетворяет пределу Бухдаля. Кроме того, левая панель на рисунке 3.8 показывает, что предлагаемая звездная модель в $F(\tilde{T})$ гравитации позволяет компактным звездным объектам достигать $M_{max} = 2.46^{+0.22}_{-0.24} M_\odot$ с радиусом $R = [9.31, 10.83] км$ при $\zeta_1 \in [1.00, 1.04]$. Опять же, правая часть на рисунке 3.8 показывает, что

компактные звездные объекты достигают $M_{max}=2.57\pm0.21M_{\odot}$ с радиусом $R=[9.65,11.71]км$ при $q_0(\cdot 10^{-7})\in[7.1,8.3]$. Это означает, что параметр кручения и параметр заряда оказывают существенное влияние на поддержание M_{max} допустимого внутри звездных систем для заданной центральной плотности. Предсказанная максимальная допустимая масса приведена $M_{max}>M_{\odot}$ с соответствующим радиусом, полученным из рисунка 3.8, сведена в таблицу 3.2. Таким образом, наблюдательные ограничения массивных наблюдаемых НЗ могут быть связаны с текущими звездными конфигурациями в рамках $F(\tilde{T})$ гравитации.

По сравнению с измерениями масс НЗ, определение радиусов было более сложным и неуловимым [139] в отношении наблюдательных параметров. Действительно, существуют новые методы измерения радиусов НЗ, которые были приняты с недавними измерениями горячих точек NICER [121, p. L24; 140] и развитием в изучении фактора приливной деформируемости и обнаружении ГВ [141]. В частности, NICER и XMM-Newton, наблюдая вращающиеся модели горячих точек НЗ, определили радиус PSR J0740+6620 как $13.70^{+2.6}_{-1.5}$ км [142] с 68% достоверностью. На фоне гравитации аксиона R^2 радиус массивных звездных объектов с массами в диапазоне 2.2-2.3 $M_{\odot}$ определен равным 11 км в исследовании [143].

Таблица 3.2 – Значения максимально допустимой массы и радиуса

ζ_1	$M_{max}(M_{\odot})$	R (км)	$q_0=\cdot 10^{-7}$	$M_{max}(M_{\odot})$	R (км)
1.00	2.22	9.31	7.1	2.78	11.71
1.01	2.35	9.80	7.4	2.68	11.17
1.02	2.46	10.15	7.7	2.57	10.65
1.03	2.58	10.51	8.0	2.46	10.15
1.04	2.68	10.83	8.3	2.36	9.65
Примечание – Значения соответствуют рисунку 3.8					

С помощью кривых $M-R$ предсказали радиусы для трех массивных НЗ, имеющих разных компонентов в двойной системе. Например, PSR J074+6620 [144] имеет маломассивную звезду в качестве компонента. Опять же, PSR J2215+5135 [145] является компонентом другой системы с пульсаром, известным как «черная вдова» PSR J1959+2048, тогда как GW190814 [122, p. L44-6L44-19] является компонентом системы с ЧД. Существует неустанное стремление понять природу вторичного компонента GW190814, который может быть либо более тяжелой НЗ, либо более легкой ЧД из-за того, что диапазон масс вторичного к компонента GW190814, то есть 2.50-2.67 $M_{\odot}$, попадает в область нижнего массового зазора. Рисунок 3.8 показывает, что соотношение $M-R$ в $F(\tilde{T})$ гравитации заметно чувствительно к меньшим изменениям значений ζ_1 и q_0. Кроме того, таблица 3.3 показывает, что предсказанные радиусы имеют тенденцию достигать больших значений для меньших приращений ζ_1 и уменьшений q_0.

Такая особенность эффективно ограничивает на более высокую компактность, поскольку увеличение силы $F(\tilde{T})$ гравитации уменьшает компактность НЗ с большой массой. В спектроскопическом исследовании [145, p. 101-1-101-14; 150] обнаружено, что предсказанные радиусы НЗ в рентгеновских двойных системах попадают в диапазон [8.3, 12] км, где сохраняется ограничение причинности.

Это соответствует предсказанным радиусам для вариаций ζ_1 и q_0, показанным в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Предсказанные радиусы трех массивных наблюдаемых звезд в зависимости от изменения параметра кручения в $F(\tilde{T})$ гравитации

Объекты	$M/M_\odot$	Предсказанный R (км)				
		ζ_1				
		1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
PSR J074+6620	2.08 ± 0.07	$9.64^{+0.03}_{-0.12}$	$9.96^{+0.13}_{-0.16}$	$10.23^{+0.15}_{-0.19}$	$10.43^{+0.20}_{-0.20}$	$10.61^{+0.22}_{-0.21}$
PSR J2215+5135	$2.28^{+0.10}_{-0.09}$	9.62	$10.16_{-0.02}$	$10.60^{+0.03}_{-0.13}$	$10.90^{+0.15}_{-0.18}$	$11.16^{+0.19}_{-0.22}$
GW190814	$2.5-2.67$	-	-	-	11.04	$11.46^{+0.31}_{-0.02}$
Примечание – Составлено по источникам [122, p. L44-6 L44-19; 144, p. L12-1-L12-17; 145, p. 101-1-101-14]						

Продолжение таблицы 3.3

Объекты	$M/M_\odot$	Предсказанный R (км)				
		$q_0 = \cdot10^{-7}$				
		7.1	7.4	7.7	8.0	8.3
PSR J074+6620	2.08 ± 0.07	$11.13^{+0.22}_{-0.27}$	$10.82^{+0.24}_{-0.21}$	$10.53^{+0.19}_{-0.22}$	$10.23^{+0.15}_{-0.21}$	$9.87^{+0.13}_{-0.16}$
PSR J2215+5135	$2.28^{+0.10}_{-0.09}$	$11.76^{+0.26}_{-0.26}$	$11.40^{+0.21}_{-0.22}$	$10.92^{+0.15}_{-0.19}$	$10.60^{+0.03}_{-0.15}$	$10.08_{-0.03}$
GW190814	$2.5-2.67$	$12.35^{+0.01}_{-0.09}$	$11.75^{-0.37}_{-0.02}$	11.16	-	-
Примечание – Составлено по источникам [122, p. L44-6 L44-19; 144, p. L12-1-L12-17; 145, p. 101-1-101-14]						

3.6 Момент инерции для медленно вращающегося объекта

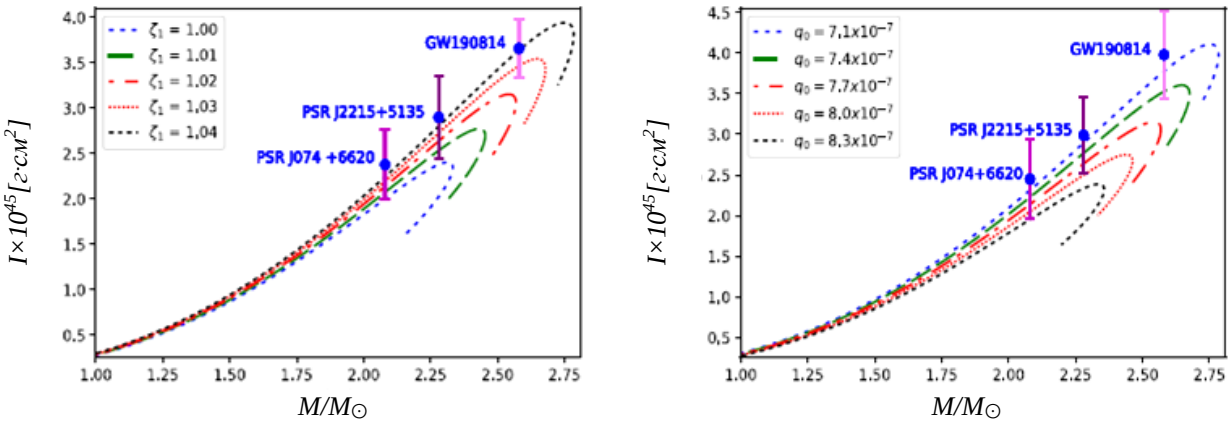
В астрономических наблюдениях двойных НЗ предполагается, что момент инерции I может быть измерен как наблюдаемый параметр с высокой точностью [147] в будущем. Эмпирическое выражение для момента инерции, которое основано на идее приближения медленного вращения и закручивания пространства, приведено Бейгером и Гензелем [39, p. 917–920] как

$$I=2/9(1+(5M_{NR}/M_\odot)\cdot(км/R_{NR}))M_{NR}R_{NR}^2 \quad (3.56)$$

где M_{NR} и R_{NR} – масса и радиус звезды без вращения соответственно с необходимым условием $(M_{NR}/(M_{NR}/M_{\odot})/(R_{NR}/км)>0.1$.

Исследование момента инерции с целью изучения влияния увеличения общей массы на I для различных параметрических значений ζ_1 и q_0. Графический вид кривых $I-M$ представлен в зависимости от ζ_1 и q_0 на левой и правой панелях рисунка 3.9 соответственно. Примечательно, что момент инерции имеет возрастающий характер с изменением общей массы для фиксированных значений ζ_1 и q_0. На каждой кривой можно увидеть максимальную точку, называемую $I_{\max}$, которая смещается вверх для увеличения ζ_1 и уменьшения q_0. Это изменение идентично кривым $M-R$ на рисунке 3.8, где M_{max} изменяется аналогичным образом.

В соответствии с таблицей 3.4, перечислены значения I для выбранных трех КО для различных значений ζ_1 и q_0, что может помочь оценить диапазон I сверхмассивных НЗ приблизительно как $\left[2.22\cdot10^{45}г\cdot см^{2}, 4.00\cdot10^{45}г\cdot см^{2}\right]$ при $\zeta_1\in[1.00,1.04]$ и $\left[2.30\cdot10^{45}г\cdot см^{2}, 4.44\cdot10^{45}г\cdot см^{2}\right]$ при $q_0\cdot10^{-7}\in[7.1,8.3]$. Это контрастирует с более широким диапазоном I, то есть $\left[7\cdot10^{43}г\cdot см^{2}, 7\cdot10^{44}г\cdot см^{2}\right]$, полученным из-за неопределенности в УС при более высоких плотностях в работе [54, p. 427-475]. Однако более узкий диапазон $I_{\max}$, как $\left[1.1\cdot10^{45}г\cdot см^{2}, 2.4\cdot10^{45}г\cdot см^{2}\right]$ PSR 1937+21 для различных уравнений состояний, таких как модель Рейда-Пандхарипанде, Фридмана-Пандхарипанде, Кантуто-Датты-Кальмана, Бете-Джонсона и тензорного взаимодействия при ρ_0 порядка 10^{15} $г/см^3$, достигнут в исследовании [148].



а б

Рисунок 3.9 – Влияние параметра кручения ζ_1 на момент инерции I и $M/M_{\odot}$ для $\zeta_1=1.02$, показанное на левой панели

Примечание – Влияние параметра заряда q_0 на момент инерции I и $M/M_{\odot}$ для $q_0=8.0\times10^{-7}$ показано на правой панели

Таблица 3.4 – Предсказанный момент инерции трёх массивных наблюдаемых звёзд в зависимости от изменения параметра кручения и параметра заряда в $F(\tilde{T})$ гравитации

Объекты	$M/M_{\odot}$	Предсказанный $I\cdot 10^{45}(г\cdot см^2)$				
		ζ_1				
		1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
PSR J074+6620	2.08 ± 0.07	$2.22^{+0.01}_{-0.15}$	$2.33^{+0.13}_{-0.18}$	$2.41^{+0.05}_{-0.19}$	$2.48^{+0.07}_{-0.20}$	$2.54^{+0.08}_{-0.21}$
PSR J2215+5135	$2.28^{+0.10}_{-0.09}$	2.57	$2.77_{-0.18}$	$2.94^{+0.22}_{-0.24}$	$3.05^{+0.29}_{-0.25}$	$3.15^{+0.31}_{-0.27}$
GW190814	$2.5-2.67$	-	-	-	3.80	$4.00^{+0.34}_{-0.24}$

Продолжение таблицы 3.4

Объекты	$M/M_{\odot}$	Предсказанный $I\cdot 10^{45}(г\cdot см^2)$				
		$q_0 = \cdot 10^{-7}$				
		7.1	7.4	7.7	8.0	8.3
PSR J074+6620	2.08 ± 0.07	$2.72^{+0.22}_{-0.24}$	$2.61^{+0.23}_{-0.21}$	2.51 ± 0.20	2.41 ± 0.19	$2.30^{+0.16}_{-0.18}$
PSR J2215+5135	$2.28^{+0.10}_{-0.09}$	$3.40^{+0.35}_{-0.31}$	$3.25^{+0.32}_{-0.28}$	$3.06^{+0.29}_{-0.26}$	$2.94^{+0.22}_{-0.24}$	$2.74_{-0.18}$
GW190814	$2.5-2.67$	$4.44^{+0.25}_{-0.27}$	$4.14^{+0.23}_{-0.38}$	3.86	-	-

Выводы по третьему разделу

Представлены уравнения гравитационного поля для анизотропной и заряженной звезды на фоне $F(\tilde{T})$ гравитации, предполагая линейную форму функции $F(\tilde{T})$. Чтобы получить точное и несингулярное решение уравнения поля, рассмотрен анзац, связанный с метрическим потенциалом, функцией заряда и функцией анизотропии, которые являются нелинейными по своей природе и проверены по физическим нормам для изменяющихся радиальных координат и параметров кручения, как показано на рисунке 3.1. Как следствие, получены выражения для физических величин, таких как плотность энергии, радиальное и тангенциальное давления анизотропной жидкости. Важно отметить, что функция анизотропии и функция заряда рассматриваются таким образом, что в отсутствие скаляра кручения эти величины не будут существовать. Следовательно, в $F(\tilde{T})$ гравитации изменение параметра кручения ζ_1 играет значительную роль в эволюционирующем заряде и анизотропии звездной материи. Тем не менее, при наличии влияния параметра кручения можно восстановить незаряженный сценарий настоящей анизотропной модели. В данном исследовании учтены ненулевые значения q_0. Особенности на границе анизотропной и заряженной КЗ в $F(\tilde{T})$ гравитации исследованы путем приведения внутреннего метрического решения в соответствие внешнему решению Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера, где граница определяется исчезающим критерием радиального давления.

Физическая обоснованность величин ρ, P_r, P_t по отношению к радиальному расстоянию и ζ_1 графически показана на рисунке 3.2 и 3.3. Неотрицательная особенность этих величин дополнительно обеспечивает выполнение энергетических условий для настоящей модели. Примечательно, что плотность и давление демонстрируют убывающий характер в отличие от анизотропии и функции заряда, относящихся к радиальной координате внутри звезды. Хотя небольшое увеличение ζ_1 эффективно увеличивает плотность и давление в центре, оно может усилить заряд и анизотропию на поверхности звезды. Использованы выражения сущностей ρ, P_r, P_t, q для вывода различных сил, таких как гравитационные F_g, гидростатические F_h, анизотропные F_a и электрические силы F_e, определяющие условие устойчивого равновесия в уравнении ТОВ. Кроме того, графическая природа этих сил показана на рисунке 3.4 для четырех различных значений ζ_1 . Установлено, что устойчивость достигается путем уравновешивания притягивающей F_g суммой трех других отталкивающих сил, присутствующих в анизотропной и заряженной звезде $F(\tilde{T})$ гравитации.

Концепция Эрреры была применена к данной гравитационной системе путем анализа квадрата скорости звука в радиальном и тангенциальном направлениях. Графические представления квадрата этих скоростей звука на рисунке 3.5 дают важный результат, что обе скорости не превышают скорость света, то есть обе скорости сохраняют неравенство $0 < v_r^2 < 1$ и $0 < v_t^2 < 1$ для различных значений параметра кручения. Следовательно, модель удовлетворяет условию причинности для выбранных значений ζ_1. Кроме того, проверены и показаны на рисунке 3.6 критерии адиабатической устойчивости, в частности для анизотропной жидкости, которые установили устойчивость анизотропной и заряженной системы для различных значений ζ_1. Более того, на основе условия ХЗН выполнен дополнительный анализ устойчивости настоящей звездной модели. В этом анализе рассматривается изменение общей массы относительно значений центральной плотности, которое показано на рисунке 3.7. Поскольку общая масса является возрастающей функцией центральной плотности, а градиент $dM/d\rho_c$ положителен для различных значений ζ_1, можно гарантировать, что условие ХЗН выполняется, и текущая модель звезды является стабильной конфигурацией в $F(\tilde{T})$ гравитации. Положительные значения $dM/d\rho_c$ демонстрируют постепенные приращения с точки зрения уменьшающихся значений параметра кручения ζ_1.

Проанализированы отношения $M-R$ для текущих заряженных и анизотропных звездных конфигураций в $F(\tilde{T})$ гравитации. Примечательно, что увеличение значений ζ_1 поднимает точки максимальной массы на кривых масса-радиус на верхней панели рисунка 3.8, в отличие от эффекта увеличения значений параметра заряда q_0, который опускает точки максимальной массы, показанные на нижней панели рисунка 3.8. Еще одной поразительной

особенностью модели является то, что параметр кручения усиливает анизотропию, а также максимальную массу звезды одновременно. Это может быть связано с зависимостью максимальной массы от усиления анизотропии в системе посредством увеличения ζ_1, как показано в работе [149], которая предполагает, что влияние анизотропии может увеличить максимальную массу изотропной системы до 15%. В частности, влияние анизотропии посредством увеличения параметра кручения может быть вероятной интерпретацией максимальных масс, превышающих 2.5 $M_\odot$, как в случае вторичного компонента GW190814. Кроме того, кривые масса-радиус на рисунке 3.8 связаны с некоторыми известными НЗ, где наблюдаемые массы показаны в полосах. Они использовались для предсказания радиусов для наблюдаемых звезд. Кривые масса-радиус, будучи очень чувствительными к ζ_1 и q_0, исследуют максимально допустимую массу около $2.46^{+0,22}_{-0,24} M_\odot$ с $R=[9.31, 10.83] км$ для $\zeta \in [1.00, 1.04]$ и 2.57 ± 0.21 $M_\odot$ с $R=[9.65, 11.71] км$ для $q_0 \times 10^{-7} \in [7.1, 8.3]$.

Также рассмотрен момент инерции, чтобы изучить влияние увеличения общей массы на I для различных значений ζ_1 и q_0, показав графическую природу кривых $I-M$ относительно ζ_1 и q_0 на рисунках. 3.9 (а) и 3.9 (б) соответственно. Важно отметить, что момент инерции имеет возрастающую природу с изменением общей массы для фиксированных значений ζ_1 и q_0. На каждой кривой $I_{\max}$ смещается вверх при увеличении ζ_1 и уменьшении q_0. Перечислены значения I для выбранных трех КО для различных значений ζ_1 и q_0 в таблице 3.4. Затем проводится оценка диапазона I сверхмассивных НЗ приблизительно как $[2.22 \cdot 10^{45}\ г \cdot см^2, 4.00 \cdot 10^{45}\ г \cdot см^2]$ для $\zeta_1 \in [1.00, 1.04]$ и $[2.30 \cdot 10^{45}\ г \cdot см^2,\ 4.44 \cdot 10^{45}\ г \cdot см^2]$ для $q_0 \cdot 10^{-7} \in [7.1, 8.3]$, что выше по величине по сравнению с оценкой $I_{\max}$ как $[1.1 \cdot 10^{45}\ г \cdot см^2, 2.4 \cdot 10^{45}\ г \cdot см^2]$ PSR 1937+21, полученный в исследовании [148, p. 542–548]. Таким образом, можно сделать вывод, что теория $F(\tilde{T})$ гравитации может поддерживать большую массу, превышающую $2M_\odot$, а также высокий момент инерции, превышающий $2.00 \cdot 10^{45} г \cdot см^2$, что может быть связано с $F(\tilde{T})$ гравитацией наблюдательными ограничениями двойных НЗ в ближайшем будущем.

Данный раздел раскрывает характерные особенности несингулярных решений уравнений поля в $F(\tilde{T})$ гравитации с линейной функцией. В будущем есть возможность изучать заряженные и анизотропные КЗ с использованием недиагональных тетрадей и нелинейных $F(\tilde{T})$ гравитационных моделей [150].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследованы анизотропные модели компактных звезд в рамках трех различных теоретических подходов: общей теории относительности с учетом электрического поля и медленного вращения, модифицированной $F(R)$ гравитации, а также $F(\tilde{T})$ гравитации. Данные подходы позволили подробно изучить влияние физических факторов и модификаций на внутреннюю структуру сверхплотных астрофизических компактных объектов.

Цель диссертационной работы исследование и построение устойчивых и физически обоснованных моделей компактных звезд, которые могут описывать современные астрономические наблюдения, включая данные гравитационно-волновых событий и характеристики массивных нейтронных звезд. Результаты исследования позволили расширить теоретическое описание компактных объектов и влияние анизотропии давления, заряда, вращения, а также кручения на динамику и структуру данных объектов.

В результате диссертационной работы получены следующие основные результаты:

В первом разделе исследована модель анизотропных компактных звезд, с учетом влияние радиального электрического поля. Установлено, что увеличение параметра заряда E_0 в диапазоне 0 до $4\cdot10^{-6}$ приводит к снижению центрального давления с $1.136\cdot10^{35}$ Па до $6.350\cdot10^{34}$ Па. Полученные результаты показывают, что влияние электромагнитного поля незначительно снижает устойчивость системы, но при этом сохраняя физическую допустимость модели в пределах реалистичных диапазонов плотности и параметров компактных объектов.

Во втором разделе рассмотрены эскпоненциальные $F(R)=R+\alpha\left(e^{-\beta R}-1\right)$ и обобщенные степенные $F(R)=R-(1-\delta)\gamma^2\left(R/\gamma^2\right)^{\delta}$ модели компактных звезд в рамках модифицированной $F(R)$ гравитации с использованием метрических потенциалов Дургапала-Фулории. Показано, что при диапазонах параметров модели α=11.112÷333.340, β=0.003÷0.090, γ=0.126÷0.327, δ=0.567÷0.697, выполняется условия причинности и согласуется с физическими ограничениями из структуры компактных объектов. Результаты подтверждают применимость модифицированных моделей $F(R)$ гравитации для описания сверхплотных и массивных объектов, таких как: *4U1538-52, SAX J 1808.4-3658, EXO 1785-248, Cen X-3, 4U1820-30, PSR J1903+327, 4U1608-52* и *PSR J 1614-2230.*

В третьем разделе исследуются модели в модифицированной телепараллельной $F(\tilde{T})$ гравитации, где гравитационное взаимодействие описывается через тензор кручения. Показано, что увеличение параметра кручения ζ_1 в диапазоне 1.00-1.04 линейной функции $F(\tilde{T})=\zeta_1\tilde{T}+\zeta_2$ при интервале радиусов 9.31-10.83 км, приводит к увеличению максимальной массы компактной звезды до 2.68 $M_{\odot}$, также момент инерции достигает до $4\cdot10^{45}$

г·см^2. Данные характеристики соответствуют с параметрами компактных объектов, рассматриваемым в этом разделе, подтверждая физическую состоятельность модели.

Наиболее эффективной для описания анизотропных компактных звезд является подход на основе $F(\tilde{T})$ гравитации, основанный формулировке гравитационного взаимодействия через кручение. Данная теория сочетает в себе преимущества двух предыдущих подходов: позволяет описывать анизотропию давления напрямую, учитывает влияние электрического заряда и обладает более простой математической структурой, что облегчает аналитическое и численное решение уравнений поля. Модели, построенные в данной теории, демонстрируют устойчивость по всем физическим критериям, а также позволяют получить массы, соответствующие наблюдаемым сверхмассивным звездам.

Результаты диссертации демонстрируют важность учета анизотропии давления, заряда и модификаций гравитационной теории при моделировании компактных звезд. Полученные модели представляют собой значительный вклад в теоретическое описание сверхплотных объектов во Вселенной и могут быть использованы для дальнейшей интерпретации астрофизических наблюдений в условиях развития гравитационно-волновой астрономии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Kumar J., Maurya S.K., Chaudhary S., Umbetova Z. et al. Physically viable and stable charged perfect fluid solution within F(Q) gravity // Physics of the Dark Universe. – 2024. – Vol. 46. – P. 101593.

2 Maurya S.K., Errehymy A., Umbetova Z. et al. Implication of f(Q, T) gravity on the formation of the charge compact stars and constraining their mass-radius relations in lower mass gap region // Journal of High Energy Astrophysics. – 2025. – Vol. 47. – P. 100391.

3 Kumar J., Maurya S.K., Kiroriwal S., Umbetova Z. et al. Dynamics of relativistic wormholes in the presence of dark matter density profile within f(Q, T) gravity // Physics of the Dark Universe. – 2024. – Vol. 46. – P. 101636.

4 Most E.R., Papenfort L.J., Weih L.R. et al. A lower bound on the maximum mass if the secondary in GW190814 was once a rapidly spinning neutron star // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. – 2020. – Vol. 499, Issue 1. – P. L82-L86.

5 Bombaci I., Drago A., Logoteta D. et al. Was GW190814 a black hole–strange quark star system? // Physical Review Letters. – 2021. – Vol. 126, Issue 16. – P. 162702.

6 Zhang N.B., Li B.A. GW190814's secondary component with mass 2.50–2.67 $M_{\odot}$ as a superfast pulsar // The Astrophysical Journal. – 2020. – Vol. 902, Issue 1. – P. 38-1-38-12.

7 Astashenok A.V., Odintsov S.D. Rotating neutron stars in F(R) gravity with axions // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2020. – Vol. 498, Issue 3. – P. 3616-3623.

8 Maurya S.K., Singh K.N. et al. The effect of gravitational decoupling on constraining the mass and radius for the secondary component of GW190814 and other self-bound strange stars in f(Q) gravity theory // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2023. – Vol. 269, Issue 2. – P. 35-1-35-25.

9 Bhar P., Singh, K.N. A four parameters quark star in quadratic f(Q) - action // Physics of the Dark Universe. – 2024. – Vol. 43. – P. 101391.

10 Bekenstein J.D. Hydrostatic equilibrium and gravitational collapse of relativistic charged fluid balls // Physical Review D. – 1971. – Vol. 4, Issue 8. – P. 2185-2190.

11 de Felice F., Yu Y., Fang J. Relativistic charged spheres // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1995. – Vol. 277, Issue 1. – P. L17-L19.

12 de Felice F., Siming L., Yunqiang Y. Relativistic charged spheres: II. Regularity and stability // Classical and Quantum Gravity. – 1999. – Vol. 16, Issue 8. – P. 2669-1-2669-14.

13 Ivanov B.V. Static charged perfect fluid spheres in general relativity // Physical Review D. – 2002. – Vol. 65, Issue 10. – P. 104001.

14 Chan R., Herrera L., Santos N.O. Dynamical instability for radiating anisotropic collapse // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1993. – Vol. 265, Issue 3. – P. 533-544.

15 Anninos P., Rothman T. Instability of extremal relativistic charged spheres // Physical Review D. – 2001. – Vol. 65, Issue 2. – P. 024003.

16 Bonnor W.B., Wickramasuriya S.B.P. Are very large gravitational redshifts possible? // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1975. – Vol. 170, Issue 3. – P. 643-649.

17 Maurya S.K., Errehymy A., Umbetova Z. et al. Modeling self-bound binary compact object with a slow rotation effect and effect of electric field gradient on the mass-radius limit and moment of inertia // Journal of High Energy Astrophysics. – 2024. – Vol. 44. – P. 45-59.

18 Tolman R.C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid // Physical Review. – 1939. – Vol. 55, Issue 4. – P. 364-373.

19 Oppenheimer J.R., Volkoff G.M. On massive neutron cores // Physical Review. – 1939. – Vol. 55, Issue 4. – P. 374-381.

20 Jasim M.K.et al. Anisotropic strange stars in Tolman–Kuchowicz spacetime // The European Physical J. – 2018. – Vol. 78, Issue 7. – P. 603-1-603-12.

21 Maurya S.K., Singh K.N. et al. Gravitationally decoupled strange star model beyond the standard maximum mass limit in Einstein–Gauss–Bonnet gravity // The Astrophysical Journal. – 2022. – Vol. 925, Issue 2. – P. 208-1-208-18.

22 Baskey L., Das S., Rahaman F. Anisotropic compact stellar objects with a slow rotation effect // The European Physical Journal C. – 2024. – Vol. 84, Issue 1. – P. 92-1-92-18.

23 de Felice F., Yu Y., Fang J. Relativistic charged spheres // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1995. – Vol. 277, Issue 1. – P. L17-L19.

24 Darmois G. Les Equations de la Gravitation Einsteinienne. – Paris, 1927. – Ch.5. – 47 p.

25 Israel W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // Il Nuovo Cimento B (1965-1970). – 1966. – Vol. 44, Issue 1. – P. 1-14.

26 Leibovitz C. Spherically symmetric static solutions of Einstein's equations // Physical Review. – 1969. – Vol. 185, Issue 5. – P. 1664-1670.

27 Sharma R., Mukherjee S., Maharaj S.D. General solution for a class of static charged spheres // General Relativity and Gravitation. – 2001. – Vol. 33, Issue 6. – P. 999-1009.

28 Harrison B.K., Thorne K.S. et al. Gravitation theory and gravitational collapse. – London, 1965.– 208 p.

29 Zeldovich Y.B., Novikov I.D. Relativistic astrophysics. Vol. 1: Stars and relativity // Physics Today. – 1972. – Vol. 25, Issue 3. – P. 63-64.

30 Bondi H. The contraction of gravitating spheres // Proceedings of the Royal Society of London. – 1964. – Vol. 281, Issue 1384. – P. 39-48.

31 Buchdahl H.A. General relativistic fluid spheres // Physical Review. – 1959. – Vol. 116, Issue 4. – P. 1027-1034.

32 Andréasson H. Sharp bounds on 2m/r of general spherically symmetric static objects // Journal of Differential Equations. – 2008. – Vol. 245, Issue 8. – P. 2243-2266.

33 Böhmer C.G., Harko T. Minimum mass–radius ratio for charged gravitational objects // General Relativity and Gravitation. – 2007. – Vol. 39. – P. 757-775.

34 Thirring H. On the effect of rotating distant masses in Einstein's theory of gravitation // Phys. Z. – 1918. – Vol. 19. – P. 33-39.

35 Brill D.R., Cohen J.M. Rotating masses and their effect on inertial frames // Physical Review. – 1966. – Vol. 143, Issue 4. – P. 1011-1015.

36 Barr E. D. et al. A pulsar in a binary with a compact object in the mass gap between neutron stars and black holes // Science. – 2024. – Vol. 383, Issue 6680. – P. 275-279.

37 Ghising M. et al. NuSTAR observation of X-ray pulsar 1E 1145.1-6141 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2022. – Vol. 517, Issue 3. – P. 4132-4137.

38 Tsygankov S.S.et al. Study of the X-ray pulsar IGR J19294+1816 with NuSTAR: Detection of cyclotron line and transition to accretion from the cold disk // Astronomy & Astrophysics. – 2019. – Vol. 621. – P. A134-1-A134-7.

39 Bejger M., Haensel P. Moments of inertia for neutron and strange stars: Limits derived for the Crab pulsar // Astronomy & Astrophysics. – 2002. – Vol. 396, Issue 3. – P. 917-921.

40 Becker W. Rotation and Accretion Powered Pulsars // Physics Today. – 2008. – Vol. 61, Issue 10. – P. 60-61.

41 Cheng K.S., Harko T. Approximate mass and radius formulas for static and rotating strange stars // Physical Review D. – 2000. – Vol. 62, Issue 8. – P. 083001.

42 Demorest P.B. et al. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay // Nature. – 2010. – Vol. 467, Issue 7319. – P. 1081-1083.

43 Romani R.W. et al. PSR J0952-0607: The fastest and heaviest known galactic neutron star // The Astrophysical Journal Letters. – 2022. – Vol. 934, Issue 2. – P. L17-1-L17-6.

44 Abbott B. P. et al. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger // Astrophys. J. Lett. – 2017. – Vol. 848. – P. L12-1-L12-59.

45 Abbott R. et al. GWTC-3: Compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the second part of the third observing run // Physical Review X. – 2023. – Vol. 13, Issue 4. – P. 041039.

46 Mukherjee S., Paul B.C. et al. Emergent universe with exotic matter // Classical and Quantum Gravity. – 2006. – Vol. 23, Issue 23. – P. 6927-1-6927-12.

47 Singh R.L. et al. Study of radiative shocks using 2D interferometry and XUV spectroscopy // Phys. of Plasmas. – 2024. – Vol. 31. – P. 033301-1-033301-15.

48 Zakharov A.F. et al. Different ways to estimate graviton mass // International Journal of Modern Physics. – 2018. – Vol. 47. – P. 1860096.

49 Astashenok A.V. et al. Causal limit of neutron star maximum mass in f(R) gravity in view of GW190814 // Physics Letters B. – 2021. – Vol. 816. – P. 136222.

50 Abbott B.P., Abbott R. et al. GW190425: Observation of a compact binary coalescence with total mass$\sim$ 3.4 $M_{\odot}$ // The Astrophysical Journal. – 2020. – Vol. 892, Issue 1. – P. L3-6-L3-24.

51 Baade W., Zwicky F. Remarks on super-novae and cosmic rays // Physical Review. – 1934. – Vol. 46, Issue 1. – P. 76-77.

52 Herrera L., Santos N.O. Local anisotropy in self-gravitating systems // Physics Reports. – 1997. – Vol. 286, Issue 2. – P. 53-130.

53 Bowers R.L., Liang E.P.T. Anisotropic spheres in general relativity // Astrophysical Journal. – 1974. – Vol. 188. – P. 657-665.

54 Ruderman M. Pulsars: structure and dynamics // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 1972. – Vol. 10. – P. 427-476.

55 Herrera L. Stability of the isotropic pressure condition // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101, Issue 10. – P. 104024.

56 Khan S., Yousaf Z. Complexity-free charged anisotropic Finch-Skea model satisfying Karmarkar condition // Physica Scripta. – 2024. – Vol. 99, Issue 5. – P. 055303.

57 Buchdahl H. A. Non-linear Lagrangians and cosmological theory // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1970. – Vol. 150, Issue 1. – P. 1-8.

58 Barrow J.D., Ottewill A.C. The stability of general relativistic cosmological theory // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1983. – Vol. 16, Issue 12. – P. 2757.

59 Starobinsky A.A. Disappearing cosmological constant in f(R) gravity //JETP letters. – 2007. – Vol. 86. – P. 157-163.

60 Sotiriou T.P., Faraoni V. f(R) theories of gravity // Reviews of Modern Physics. – 2010. – Vol. 82, Issue 1. – P. 451-497.

61 Cognola G. et al. Class of viable modified f(R) gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion // Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology. – 2008. – Vol. 77, Issue 4. – P. 046009.

62 Ilyas M., Ahmad D. Stability analysis of anisotropic stellar structures in f(R) gravity // Chinese Journal of Physics. – 2024. – Vol. 88. – P. 901-912.

63 Farasat Shamir M., Rashid A. Bardeen compact stars in modified f(R) gravity with conformal motion // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2023. – Vol. 20, Issue 02. – P. 2350026.

64 Durgapal M.C., Fuloria R.S. Analytic relativistic model for a superdense star // General relativity and gravitation. – 1985. – Vol. 17. – P. 671-681.

65 Maurya S.K. et al. Anisotropic models for compact stars // The European Physical Journal C. – 2015. – Vol. 75, Issue 5. – P. 225-1-225-12.

66 Bamba K., Nojiri S., Odintsov S.D. Time-dependent matter instability and star singularity in F(R) gravity // Physics Letters B. – 2011. – Vol. 698, Issue 5. – P. 451-456.

67 Nazar H., Abbas G. Study of gravitational collapse for anisotropic Karmarkar star in minimally coupled f(R) gravity // Chinese Journal of Physics. – 2022. – Vol. 79. – P. 124-140.

68 Cahill M.E., McVittie G.C. Spherical Symmetry and Mass-Energy in General Relativity. I. General Theory // Journal of Mathematical Physics. – 1970. – Vol. 11, Issue 4. – P. 1382-1391.

69 Birkhoff G.D., Langer R.E. Relativity and modern physics. – Cambridge: Harvard University Press, 1927. – 294 p.

70 Jebsen J.T. On the general spherically symmetric solutions of Einstein's gravitational equations in vacuo // General Relativity and Gravitation. – 2005. – Vol. 37, Issue 12. – P. 2253-2259.

71 Casado-Turrión A., Dobado A., de la Cruz-Dombriz Á. Is gravitational collapse possible in f(R) gravity? // Physical Review D. – 2022. – Vol. 105, Issue 8. – P. 084060.

72 Usman A., Shamir M.F. Collapsing stellar structures in f(R) gravity using Karmarkar condition // New Astronomy. – 2022. – Vol. 91. – P. 101691.

73 Nazar H., Abbas G. Charged anisotropic collapsing stars with heat flux in f(R) gravity // Chinese Journal of Physics. – 2020. – Vol. 63. – P. 436-447.

74 Goswami R. et al. Collapsing spherical stars in f(R) gravity // Physical Review D. – 2014. – Vol. 90, Issue 8. – P. 084011.

75 Chakrabarti S., Banerjee N. Gravitational collapse in f(R) gravity for a spherically symmetric spacetime admitting a homothetic Killing vector // The European Physical Journal Plus. – 2016. – Vol. 131, Issue 5. – P. 144.

76 Amendola L., Polarski D., Tsujikawa S. Are f(R) dark energy models cosmologically viable? // Physical review letters. – 2007. – Vol. 98, Issue 13. – P. 131302.

77 Olmo G.J., Rubiera-Garcia D., Wojnar A. Stellar structure models in modified theories of gravity: Lessons and challenges // Physics Reports. – 2020. – Vol. 876. – P. 1-75.

78 Malik A., Asghar Z., Shamir M.F. Krori–Barua Bardeen compact stars in f(R, T) gravity // New Astronomy. – 2023. – Vol. 104. – P. 102071.

79 Asghar Z. et al. Comprehensive analysis of relativistic embedded class-I exponential compact spheres in f(R, ϕ) gravity via Karmarkar condition // Communications in Theoretical Physics. – 2023. – Vol. 75, Issue 10. – P. 105401.

80 Faulkner T. et al. Constraining f (R) gravity as a scalar-tensor theory // Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology. – 2007. – Vol. 76, Issue 6. – P. 063505.

81 Kumar R., Maurya S.K., Umbetova Z. et al. Anisotropic model of stellar objects in modified f(R) gravity // Chinese Journal of Physics. – 2024. – Vol. 92. – P. 1-22.

82 Rawls M.L. et al. Refined neutron star mass determinations for six eclipsing x-ray pulsar binaries // The Astrophysical Journal. – 2011. – Vol. 730, Issue 1. – P. 25-1-25-40.

83 Elebert P. et al. Optical spectroscopy and photometry of SAX J1808. 4− 3658 in outburst // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2009. – Vol. 395, Issue 2. – P. 884-894.

84 Özel F. et al. The mass and radius of the neutron star in EXO 1745 − 248 // The Astrophysical Journal. – 2009. – Vol. 693, Issue 2. – P. 1775-12-1775-15.

85 Güver T. et al. The Mass and Radius of the Neutron Star in 4U 1820 − 30 // The Astrophysical Journal. – 2010. – Vol. 719, Issue 2. – P. 1807-1-1807-20.

86 Freire P.C.C. et al. On the nature and evolution of the unique binary pulsar J1903+0327 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2011. – Vol. 412, Issue 4. – P. 2763-2780.

87 Gangopadhyay T. et al. Strange star equation of state fits the refined mass measurement of 12 pulsars and predicts their radii // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2013. – Vol. 431, Issue 4. – P. 3216-3221.

88 Güver T. et al. The Distance, Mass, and Radius of the Neutron Star in 4U 1608-52 // The Astrophysical Journal. – 2010. – Vol. 712, Issue 2. – P. 964-1-964-31.

89 Demorest P.B. et al. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay // Nature. – 2010. – Vol. 467, Issue 7319. – P. 1081-1083.

90 Böhmer C.G., Harko T. Bounds on the basic physical parameters for anisotropic compact general relativistic objects // Classical and Quantum Gravity. – 2006. – Vol. 23, Issue 22. – P. 6479-1-6479-18.

91 Gokhroo M.K., Mehra A.L. Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity // General relativity and gravitation. – 1994. – Vol. 26. – P. 75-84.

92 Herrera L. Cracking of self-gravitating compact objects // Physics Letters A. – 1992. – Vol. 165, Issue 3. – P. 206-210.

93 Bondi H. The contraction of gravitating spheres // Proceedings of the Royal Society of London. – 1964. – Vol. 281, Issue 1384. – P. 39-48.

94 Chandrasekhar S. The equilibrium and the stability of the Darwin ellipsoids // Astrophysical Journal. – 1964. – Vol. 140. – P. 599-620.

95 Heintzmann H., Hillebrandt W. Neutron stars with an anisotropic equation of state-mass, redshift and stability // Astronomy and Astrophysics. – 1975. – Vol. 38, Issue 1. – P. 51-55.

96 Horvat D., Ilijić S., Marunović A. Radial pulsations and stability of anisotropic stars with a quasi-local equation of state // Classical and quantum gravity. – 2010. – Vol. 28, Issue 2. – P. 025009.

97 Astashenok A.V. et al. Maximum baryon masses for static neutron stars in f(R) gravity // Europhysics Letters. – 2022. – Vol. 136, Issue 5. – P. 59001.

98 Aldrovandi R., Pereira J.G. An introduction to geometrical physics. – Sao Paulo, 1995. – 691 p.

99 Bengochea G.R., Ferraro R. Dark torsion as the cosmic speed-up // Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology. – 2009. – Vol. 79, Issue 12. – P. 124019.

100 Boehmer C.G., Mussa A., Tamanini N. Existence of relativistic stars in f(T) gravity // Classical and Quantum Gravity. – 2011. – Vol. 28, Issue 24. – P. 245020.

101 Iorio L., Saridakis E.N. Solar system constraints on f(T) gravity // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2012. – Vol. 427, Issue 2. – P. 1555-1561.

102 Cai Y.F. et al. f(T) gravity after GW170817 and GRB170817A // Physical Review D. – 2018. – Vol. 97, Issue 10. – P. 103513.

103 Abbott B.P. et al. GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral // Physical review letters. – 2017. – Vol. 119, Issue 16. – P. 161101.

104 Goldstein A. et al. An ordinary short gamma-ray burst with extraordinary implications: Fermi-GBM detection of GRB 170817A // The Astrophysical Journal Letters. – 2017. – Vol. 848, Issue 2. – P. L14-1-L14-14.

105 Yan S.F. et al. Interpreting cosmological tensions from the effective field theory of torsional gravity // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101, Issue 12. – P. 121301.

106 Wu P., Yu H. Observational constraints on f(T) theory // Physics Letters B. – 2010. – Vol. 693, Issue 4. – P. 415-420.

107 Duchaniya L.K., Gandhi K., Mishra B. Attractor behavior of f(T) modified gravity and the cosmic acceleration // Physics of the Dark Universe. – 2024. – Vol. 44. – P. 101461.

108 Duchaniya L.K., Lohakare S.V., Mishra B. Cosmological models in f(T, T) gravity and the dynamical system analysis // Physics of the Dark Universe. – 2024. – Vol. 43. – P. 101402.

109 Wang T. Static solutions with spherical symmetry in f(T) theories // Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology. – 2011. – Vol. 84, Issue 2. – P. 024042.

110 Daouda M.H., Rodrigues M.E., Houndjo M.J.S. New static solutions in f(T) theory // The European Physical Journal C. – 2011. – Vol. 71. – P. 1-8.

111 Abbas G. et al. Anisotropic compact stars in f(G) gravity // Astrophysics and Space Science. – 2015. – Vol. 357. – P. 1-11.

112 Naz T., Malik A., Ramay Z. Anisotropic quark stars in modified f(R, T) gravity utilizing Tolman V potential // International Journal of Theoretical Physics. – 2024. – Vol. 63, Issue 6. – P. 148.

113 Naz T., Malik A., Ramay Z. Physical behavior of anisotropic quark stars in modified f(R, T) gravity // International Journal of Theoretical Physics. – 2024. – Vol. 63, Issue 3. – P. 78.

114 Sawyer R.F. Condensed π−phase in neutron-star matter // Physical Review Letters. – 1972. – Vol. 29, Issue 6. – P. 382-385.

115 Cosenza M. et al. Some models of anisotropic spheres in general relativity // J. Math. Phys. – 1981. – Vol. 22, Issue 1. – P. 118-125.

116 Herrera L. Physical causes of energy density inhomogenization and stability of energy density homogeneity in relativistic self-gravitating fluids // International J of Modern Physics D. – 2011. – Vol. 20, Issue 09. – P. 1689-1703.

117 Errehymy A., Daoud M. Studies a star made of anisotropic fluid packed in a spherical shell // Modern Physics Letters A. – 2019. – Vol. 34, Issue 04. – P. 1950030.

118 Errehymy A., Daoud M., Sayouty E.H. A spherically symmetric model of anisotropic fluid for strange quark spheres // The European Physical Journal C. – 2019. – Vol. 79. – P. 1-9.

119 Dev K., Gleiser M. Anisotropic stars: exact solutions // General relativity and gravitation. – 2002. – Vol. 34. – P. 1793-1818.

120 Linares M., Shahbaz T., Casares J. Peering into the dark side: Magnesium lines establish a massive neutron star in PSR J2215+5135 // The Astrophysical Journal. – 2018. – Vol. 859, Issue 1. – P. 54-1-54-14.

121 Miller M. C. et al. PSR J0030+0451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter // The Astrophysical Journal Letters. – 2019. – Vol. 887, Issue 1. – P. L24.

122 Abbott R. et al. GW190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object // The Astrophysical Journal Letters. – 2020. – Vol. 896, Issue 2. – C. L44-6-L44-20.

123 Rosseland S. Electrical state of a star // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 192. – Vol. 84. – P. 720-728.

124 Neslušan L. On the global electrostatic charge of stars // Astronomy & Astrophysics. – 2001. – Vol. 372, Issue 3. – P. 913-915.

125 Giuliani A., Rothman T. Absolute stability limit for relativistic charged spheres // General Relativity and Gravitation. – 2008. – Vol. 40. – P. 1427-1447.

126 Treves A., Turolla R. Vacuum breakdown near a black hole charged by hypercritical accretion // The Astrophysical Journal. – 1999. – Vol. 517, Issue 1. – P. 396-398.

127 Ray S., Das B. Charged static fluid spheres in general relativity // Astrophysics and space science. – 2002. – Vol. 282, Issue 4. – P. 635-644.

128 Sagar K.G., Pandey B., Pant N. Hybrid star model in Tolman-Buchdahl metric potentials with coupled dark energy and baryonic matter // Astrophysics and Space Science. – 2022. – Vol. 367, Issue 8. – P. 72.

129 Pant N. et al. Three-layered relativistic stellar model endowed with distinct equation of states // The European Physical J Plus. – 2020. – Vol. 135. – P. 1-21.

130 Momeni D. et al. Modelling of a compact anisotropic star as an anisotropic fluid sphere in f(T) gravity // Canadian Journal of Physics. – 2018. – Vol. 96, Issue 12. – P. 1295-1303.

131 Chanda A., Dey S., Paul B.C. Anisotropic compact objects in f(T) gravity with Finch–Skea geometry // The European Physical Journal C. – 2019. – Vol. 79. – P. 1-12.

132 Ilijić S., Sossich M. Compact stars in f(T) extended theory of gravity // Physical Review D. – 2018. – Vol. 98, Issue 6. – P. 064047.

133 Saha P., Debnath U. Study of anisotropic compact stars with quintessence field and modified chaplygin gas in f(T) gravity // The European Physical Journal C. – 2019. – Vol. 79. – P. 1-16.

134 Schouten J.A. Ricci-calculus: an introduction to tensor analysis and its geometrical applications. – Berlin: Springer, 2013. – Vol. 10. – 514 p.

135 Hayashi K., Shirafuji T. New general relativity // Physical Review D. – 1979. – Vol. 19, Issue 12. – P. 3524-3553.

136 Maurya S.K., Errehymy A., Umbetova Z. et al. Effect of torsion and electric charge parameters on the configuration of anisotropic compact stars in f(T) gravity // Physics of the Dark Universe. – 2024. – Vol. 46. – P. 101586.

137 Абдижалилова У.У., Умбетова Ж.С. Сфералық-симметриялық анизотропты жұлдыз үшін телепараллель гравитациясындағы f(τ) ширату скалярын анықтау // XXI Международная научно-практическая конференция «Молодежь, наука и инновации» Актобе: Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, 2025 – С. 406–409.

138 Умбетова Ж.С., Абдижалилова У.У. f(τ) - телепараллель гравитациясындағы анизотропты компактты жұлдыздардың эволюциясының динамикасы // Научный журнал «Доклады НАН РК» - 2025 – Т. 354, № 2. – С. 105-120.

139 Özel F., Freire P. Masses, radii, and the equation of state of neutron stars // Annual Review of Astronomy and Astrop. – 2016. – Vol. 54, Issue 1. – P. 401-440.

140 Riley T. E. et al. A NICER view of the massive pulsar PSR J0740+ 6620 informed by radio timing and XMM-Newton spectroscopy // The Astrophysical Journal Letters. – 2021. – Vol. 918, Issue 2. – P. L27-1-L27-41.

141 Abbott B.P. et al. GW170817: Measurements of neutron star radii and equation of state // Physical review letters. – 2018. – Vol. 121, Issue 16. – P. 161101.

142 Miller M.C. et al. The radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton data // The Astrophysical Journal Letters. – 2021. – Vol. 918, Issue 2. – P. L28.

143 Astashenok A.V., Odintsov S.D. Supermassive neutron stars in axion F(R) gravity // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2020. – Vol. 493, Issue 1. – P. 78-86.

144 Fonseca E. et al. Refined mass and geometric measurements of the high-mass PSR J0740+6620 // The Astrophysical Journal Letters. – 2021. – Vol. 915, Issue 1. – P. L12-1-L12-18.

145 Kandel D., Romani R.W. Atmospheric circulation on black widow companions // The Astrophysical J. – 2020. – Vol. 892, Issue 2. – P. 101-1-101-15.

146 Steiner A.W., Lattimer J.M., Brown E.F. The equation of state from observed masses and radii of neutron stars // The Astrophysical Journal. – 2010. – Vol. 722, Issue 1. – P. 33-1-33-48.

147 Lattimer J.M., Schutz B.F. Constraining the equation of state with moment of inertia measurements // The Astrophysical Journal. – 2005. – Vol. 629, Issue 2. – P. 979-1-979-13.

148 Ray A., Datta B. Rotating neutron star structure-Implications of the millisecond pulsar PSR 1937+214 // Astrophysical Journal. – 1984. – Vol. 282. – P. 542-549.

149 Becerra L.M., Becerra-Vergara E.A., Lora-Clavijo F.D. Realistic anisotropic neutron stars: Pressure effects // Physical Review D. – 2024. – Vol. 109, Issue 4. – P. 043025.

150 de Araujo J.C.N., Fortes H.G.M. Compact stars in f(T) = T+ ξ T β gravity // The European Physical Journal C. – 2023. – Vol. 83, Issue 12. – P. 1168-1-1168-8.